CONDICIONES NECESARIAS PARA EL CONTROL ÓPTIMO DE DESIGUALDADES VARIACIONALES MONÓTONAS

Amalia Blanco Louro
Departamento de Economía Aplicada 2
Universidade da Coruña
e-mail: amaliabl@udc.es

Carmen S. Lema Fernández
Departamento de Economía Aplicada 2
Universidade da Coruña
e-mail: colito@udc.es

Luis P. Pedreira Andrade
Departamento de Economía Aplicada 2
Universidade da Coruña
e-mail: luky@udc.es

Carla Rey Graña
Departamento de Economía Aplicada 2
Universidade da Coruña
e-mail: carlarey@udc.es

Resumen

El problema de control óptimo gobernado por una desigualdad variacional elíptica fue propuesto primeramente por J. L. Lions (1969, 1972) y estudiado por Barbu (1984). En este trabajo obtenemos interesantes informaciones acerca de las soluciones óptimas. En realidad estudiamos el problema presentado por Jane J. Ye

$$\text{(OCVI)} \qquad \min \quad J(y,u)$$
$$\text{s.a} \quad y \in K,\ u \in U_{ad}$$
$$\langle F(y,u), z-y \rangle \geq 0 \ \ \forall z \in K,$$

que es mas general que el propuesto por Lions, a continuación generalizamos el principio del máximo siguiendo el trabajo presentado por M. Bergounioux y H. Zidani (1996).

Palabras clave: Control óptimo, desigualdades variacionales elípticas, Principio de Pontryagin.

1. Preliminares.

En esta sección exponemos algunas herramientas de análisis no smooth que serán utilizadas a lo largo del trabajo. Para mas detalles, ver Clarke (1983) y Mordukhovich y Shao (1996).

DEFINICIÓN 1. Sea Ω un subconjunto no vacio de $\Re^n$ y sea $\varepsilon \geq 0$. Sea $\bar{x} \in Cl(\Omega)$, el conjunto:

$$\hat{N}_{\varepsilon}(\bar{x},\Omega) := \left\{ \varphi \in \hat{\Re}^n \,\middle|\, \limsup_{\substack{x\to\bar{x} \\ x\in\Omega}} \frac{\langle \varphi, x-\bar{x}\rangle}{\|x-\bar{x}\|} \leq \varepsilon \right\} \qquad (1.1)$$

se denomina *conjunto de Fréchel* ***ε****-normal* para el conjunto Ω en el punto $\bar{x}$. Cuando $\varepsilon=0$, el conjunto (1.1) es un cono que se denomina *cono de Fréchel normal* en el punto $\bar{x}$ y es denotado por $\hat{N}(\bar{x},\Omega)$.

El siguiente cono no vacío

$$\mathrm{N}(\bar{x},\Omega) := \left\{ \varphi \in \hat{\Re}^n \,\middle|\, \exists x_k \to \bar{x}, \varepsilon_k \downarrow 0, \varphi_k \xrightarrow{\hat{w}} \varphi,\ \varphi_k \in \hat{N}_{\varepsilon_k}(x_k,\Omega) \text{ con } k\to\infty \right\}$$

se denomina *cono límite normal* de Ω en el punto $\bar{x}$.

DEFINICIÓN 2. Sea $f:\Re^n \to \Re \cup \{+\infty\}$ semicontinua inferiormente y finita en $\bar{x} \in \Re^n$. El *subgradiente límite* de f en $\bar{x}$ está definido por:

$$\partial f(\bar{x}) := \left\{ \varphi \in \hat{\Re}^n : (\varphi,-1) \in \mathrm{N}((\bar{x}, f(\bar{x})), \mathrm{epi}(f)) \right\}$$

y la *subdiferencial singular* de f en $\bar{x}$ esta definida como:

$$\partial^{\infty} f(\bar{x}) := \left\{ \varphi \in \hat{\Re}^n : (\varphi,0) \in \mathrm{N}((\bar{x}, f(\bar{x})), \mathrm{epi}(f)) \right\}$$

donde $\mathrm{epi}(f) := \{(x,r) \in \Re^n \times \Re : f(x) \leq r\}$ es el *epígrafe de f*.

COROLARIO 1. Sea Ω un subconjunto cerrado de $\Re^n$ y ψ_Ω la función indicador. Se sigue que

$$\partial\psi_\Omega(\bar{x})=\partial^\infty\psi_\Omega(\bar{x})=N_\Omega(\bar{x}).$$

PROPOSICIÓN 1. Sea $f:\Re^n\to\Re\cup\{+\infty\}$ semicontinua inferiormente. Si f tiene un mínimo local en $\bar{x}\in\Re^n$, entonces

$$0\in\partial f(\bar{x}).$$

DEFINICIÓN 3. Sea Ω un subconjunto cerrado de $\Re^n$, se dice que Ω es *secuencialmente normalmente compacto* en $\bar{x}\in\Omega$ si cualquier sucesión (x_k,φ_k) que satisface

$$\varphi_k\in \hat{N}(x_k,\Omega), x_k \to \bar{x}, \boldsymbol{j}_k \xrightarrow{\hat{w}} 0 \textit{ cuando } k\to\infty$$

contiene una subsucesión con $\left\|\boldsymbol{j}_{k_v}\right\|\to 0$ cuando $v\to 0$.

DEFINICIÓN 4. Sea $f:\Re^n\to\Re\cup\{+\infty\}$ semicontinua inferiormente y finita en $\bar{x}\in\Re^n$, se dice que *f es secuencialmente normalmente epi-compacta* alrededor de $\bar{x}$ si su epígrafe es secuencialmente normalmente compacto en $\bar{x}$.

PROPOSICIÓN 2. Sea $f:\Re^n\to\Re\cup\{+\infty\}$ direccionalmente lipschitziana en el sentido de Clarke (1983): en $\bar{x}\in\Re^n$. Entonces f es secuencialmente normalmente epi-compacta alrededor de $\bar{x}$.

La demostración se puede ver en Barbu (1984).

PROPOSICIÓN 3. Sean funciones $f_i:\Re^n\to\Re\cup\{\infty\}$ semicontinuas inferiormente y finitas en $\bar{x}$, i=1,2 y una de ellas secuencialmente normalmente epi-compacta alrededor de $\bar{x}$. Entonces se cumple la siguiente inclusión

$$\partial(f_1+f_2)(\bar{x})\subset\partial f_1(\bar{x})+\partial f_2(\bar{x})$$

lo que da

$$\partial^{\infty}f_1(\bar{x})\cap(-\partial^{\infty}f_2(\bar{x}))=\{0\}$$

Dicha proposición es el Corolario 3.4 de Mordukhovich y Shao (1996).

DEFINICIÓN 5. Sean Φ:X$\rightarrow$Y una aplicación multivaluada (es decir, que asigna a cada $x\in$ X un conjunto $\Phi(x)\subseteq Y$) y $(\bar{x},\bar{y})\in$ ClgrafΦ, donde grafΦ es el grafo de Φ definido por

$$\text{graf}\Phi:=\{(x,y)\in X\times Y:\ y\in\Phi(x)\}.$$

La aplicación multivaluada $\hat{D}\Phi(\bar{x},\bar{y})$ de $\hat{Y}$ en $\hat{X}$ definida por

$$\hat{D}\Phi(\bar{x},\bar{y})(\psi)=\left\{\varphi\in\hat{X}:(\varphi,-\psi)\in N((\bar{x},\bar{y}),\text{graf}\Phi)\right\},$$

se llama *coderivada de* ***F*** en el punto $(\bar{x},\bar{y})$. Por convenio, para $(\bar{x},\bar{y})\notin$ ClgrafΦ definimos $\hat{D}\Phi(\bar{x},\bar{y})(\psi)=\varnothing$. El símbolo $\hat{D}\Phi(\bar{x})$ se usa cuando Φ es una aplicación en $\bar{x}$ e $\bar{y}=\Phi(\bar{x})$.

COROLARIO 2. Recordamos que una aplicación Φ:X$\rightarrow$Y se dice *estrictamente diferenciable* en $\bar{x}$ con derivada $\Phi'(\bar{x})$ si

$$\lim_{x,x'\to\bar{x}}\frac{\Phi(x)-\Phi(x')-\Phi'(\bar{x})(x-x)}{\|x-x'\|}=0.$$

En este caso especial de aplicación estrictamente diferenciable en $\bar{x}$, la coderivada coincide con el operador lineal adjunto a la derivada estricta clásica, es decir

$$\hat{D}\Phi(\bar{x})(\psi)=\hat{\Phi'}(\bar{x})\psi\quad\forall\,\psi\in\hat{Y}$$

donde $\hat{\Phi'}(\bar{x})$ denota el adjunto de $\Phi'(\bar{x})$.

PROPOSICIÓN 4. Sean f:$\Re^n\rightarrow\Re^p$ estrictamente diferenciable en $\bar{x}$ y Φ:$\Re^n\rightarrow\Re^p$ una aplicación multivaluada cerrada arbitraria. Entonces para cualquier $\bar{y}\in f(\bar{x})+\Phi(\bar{x})$ y $\psi\in\hat{\Re}^p$ se tiene

$$\hat{D}(f+\Phi)(\bar{x},\bar{y})(\psi)=f'(\hat{\bar{x}})\,\psi+\hat{D}\Phi(\bar{x},\bar{y}-f(\bar{x}))(\psi)\,.$$

Esta proposición es el teorema 3.5 de Mordukhovich y Shao (1996).

2. Planteamiento del problema de control óptimo en tiempo continuo.

Se considera un sistema dinámico, formulado en tiempo continuo, en un horizonte temporal dado $J=[t_0,t_1]$, cuya situación inicial viene dada por el vector n-dimensional x_0, y que evoluciona en el tiempo. Dicha evolución depende del valor que se de a ciertas variables, llamadas *variables de control*, que permiten influir en el sistema. Sea u(t) el vector p-dimensional de variables de control en el instante t. Representamos por x(t), para cada $t\in[t_0,t_1]$, el vector n-dimensional llamado vector de *variables de estado*, que nos indica la situación del sistema en el instante t.

Se llama *ecuación de estado* al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, que describe el comportamiento que estamos considerando:

$$x'(t)=f(x(t),u(t),t),\ \text{para } t\in J,\ \text{con } x(t_0)=x_0,$$

en donde: el vector de variables de estado en el instante t, $x(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))'$ pertenece a $\mathfrak{R}^n$, el vector de variables de control en el instante t, $u(t)=(u_1(t),\ldots,u_p(t))'$ pertenece a $\mathfrak{R}^p$, f es una función cuyo dominio esta contenido en $\mathfrak{R}^n\times\mathfrak{R}^p\times\mathfrak{R}$, que toma valores en $\mathfrak{R}^n$ y que posee derivadas parciales primeras continuas. Cuando no de lugar a confusión suprimiremos la notación (t). Así x(t) se escribirá simplemente como x, u(t) como u. Denotaremos la derivada de x por y .

Definimos un *control admisible*, como aquella trayectoria de control u, que es continua a trozos (lo que quiere decir que es continua en todos los puntos, excepto, quizá, en un número finito de ellos) y que, además, cumple la condición de que $u\in U\subset\mathfrak{R}^p$.

Se supone que el vector de variables de estado x es una función continua, y con derivada continua a trozos, verificando que

$$y=f(x,u,t),$$

en todos los puntos de continuidad de u.

Definimos a continuación el funcional objetivo que da una medida cuantitativa del comportamiento del sistema en el tiempo.

Se consideran funcionales del tipo:

$$J(y,u)= \int_{\Omega x J} F(x,t,y,u)dxdt + \int_{\Omega} L(x,y)dx \ ,$$

Se supone que F y L poseen derivadas parciales primeras continuas.

El primer sumando del funcional J(y,u) es una integral que depende de los valores x y u a lo largo del horizonte temporal. El segundo sumando L(x,y) valora el estado en que queda el sistema al final del intervalo de tiempo que constituye el horizonte temporal del problema.

Un *control óptimo* es definido como un control admisible que minimiza el funcional objetivo.

Por tanto, el problema que nos ocupa es el siguiente:

Dado un sistema dinámico con condición inicial x_0, y que evoluciona en el tiempo de acuerdo con la ecuación de estado y=f(x,u,t), se trata de encontrar el vector de control que sea admisible y haga que el funcional objetivo alcance el valor mínimo.

Expresado en términos matemáticos se tratará de:

$$\min_{u} \ J(y,u)= \int_{\Omega x J} F(x,t,y,u)dxdt + \int_{\Omega} L(x,y)dx \ ,$$

$$\text{con: } x(t_0)=x_0,$$

$$u \in U.$$

El control $\bar{u}$ que resuelve el problema se llama *control óptimo* y el vector $\bar{x}$, determinado por la ecuación de estado a partir de $\bar{u}$ se llama trayectoria de estado óptima o *camino óptimo*.

3. Planteamiento del control óptimo sujeto a una desigualdad variacional elíptica. Condición necesaria de optimalidad

El problema de control óptimo para una desigualdad variacional elíptica considerado por Lions es el siguiente

(P) minimizar $J(y,u)= g(y)+h(u)$

s.a $y\in K,\ u\in U_{ad}$

$$\langle Ay, z-y\rangle \geq \langle Bu+f, z-y\rangle \quad \forall z\in K,$$

donde u es la variable de control e y la variable de estado. Suponemos que U_{ad} es de la forma

$$U_{ad} = \{\, u\in L^p(Q) \mid u(x,t)\in K_U(x,t) \text{ en casi todo } Q\},$$

donde $Q= \Omega\times J$ y K_U es una aplicación multivaluada que a cada elemento de Q le hace corresponder un subconjunto cerrado de $\Re$, $B\in L(\Re^p, \hat{\Re}^n)$ es compacta, $K\subset\Re^n$ y $U_{ad}\subset\Re^p$ son cerrados y convexos, $f\in \hat{\Re}^n$, $g:K\to\Re^+$ y $h:U_{ad}\to\Re^+$ son dos funciones dadas y A es una forma bilineal coerciva en $\Re^n$ con producto escalar canónico, es decir, existe $\mu>0$ tal que $\langle Ay,y\rangle \geq \mu\|y\|^2$ para todo y.

En este trabajo estudiamos el siguiente problema de control óptimo para una desigualdad variacional fuertemente monótona que es más general que el expuesto por Lions.

(OCVI) minimizar $J(y,u)$

s.a $y\in K,\ u\in U_{ad}$

$$\langle F(y,u), z-y\rangle \geq 0, \quad \forall z\in K,$$

en donde se satisfacen las siguientes condiciones:

a) K y U_{ad} son subconjuntos cerrados y convexos.

b) Existe un subespacio cerrado M tal que $U_{ad} \subseteq M$ y el interior de U_{ad} relativo a M es no vacio.

c) $J: \Re^n \times U_{ad} \to \Re$ es lipchitziana alrededor de $(\bar{y}, \bar{u})$

d) $F: \Re^n \times U_{ad} \to \hat{\Re}^n$ es estrictamente diferenciable en $(\bar{y}, \bar{u})$ y localmente monótona fuerte en y y uniformemente en u, es decir, existen $\mu > 0$ y un entorno $\xi(\bar{y}, \bar{u})$ de $(\bar{y}, \bar{u})$ tal que

$$\left\langle F(z,u) - F(y,u), z - y \right\rangle \geq \mu \left\| z - y \right\|^2 \quad \forall (y,u),(z,u) \in \xi(\bar{y}, \bar{u}) \cap (K \times U_{ad})$$

El siguiente teorema nos da una condición necesaria:

TEOREMA 1. [Condición necesaria de optimalidad] Sea $(\bar{y}, \bar{u})$ una solución local del problema (OCVI). Entonces existe $\eta \in \Re^n$ tal que

$$0 \in \partial J(\bar{y}, \bar{u}) + F'(\bar{y}, \bar{u})\eta + \left[\hat{D}N_K(\bar{y}, -F(\bar{y}, \bar{u}))(\eta) \times \{0\} \right] + \left[\{0\} \times N(\bar{u}, U_{ad}) \right] \quad (3.1)$$

donde ∂ denota el subgradiente límite, F' la derivada estricta, $N(\bar{u}, U_{ad})$ el cono normal del conjunto convexo U_{ad} en $\bar{u}$ y N_K el operador cono normal definido por

$$N_K(y) := \begin{cases} \text{el cono normal de K en y} & \text{si } y \in K \\ \varnothing & \text{si } y \notin K \end{cases}$$

y $\hat{D}$ la aplicación coderivada

El caso particular planteado por Lions, donde J(y,u)=g(y)+h(u) y F(y,u)=Ay-Bu-f , es decir el problema (P) la propiedad (3.1) se convierte en:

$$0 \in \partial g(\bar{y}) + \hat{A}\eta + \hat{D}N_K(\bar{y}, -F(\bar{y}, \bar{u}))(\eta) \qquad (3.2)$$

$$0 \in \partial h(\bar{u}) - \hat{B}\eta + N(\bar{u}, U_{ad}) \qquad (3.3)$$

La demostración de este teorema la podemos ver en Ye (1998). Tenemos que observar que las formulas (3.2) y (3.3) expresan la condición necesaria de optimalidad dada por el Teorema 3.1 de Barbu (1984) con el subgradiente de Clarke reemplazado por el subgradiente límite y con el notacional derivada generalizada de segundo orden sustituido por la derivada generalizada de segundo orden $\hat{D}N_k$.

4. El principio de Pontryagin

Para plantear el principio de Pontryagin, usamos un método basado en la penalización de las condiciones de estado, y en el principio de Ekeland combinado con perturbaciones difusas. Estas técnicas han sido utilizadas por algunos autores en el caso del control óptimo de ecuaciones parabólicas o elípticas. Algunas de estas técnicas han sido utilizadas para problemas de control gobernados por desigualdades variacionales (ver Bonnans y Casas (1995), Yong (1992), Bergounioux y Tröltzsch (1996)).

Suponemos:

(S1) A es un operador elíptico diferencial definido por

$$Ay=-\sum_{i,j=1}^{n}\partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j}y)+a_0(x)y \text{ con}$$

$$a_{ij}\in C^2(\overline{\Omega}) \text{ para } i,j=1,\ldots,n \tag{4.1}$$

$$a_0\in L^\infty(\Omega), \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)x_ix_j\geq m_0\sum_{i=1}^{n}x_i^2,\ \ \forall x\in\overline{\Omega}, \forall x\in\Re^n, m_0>0,$$

(S2) f: $\Re\to\Re$ es una función de clase 1, monótona creciente, globalmente lipchitziana.

NOTA. La suposición de la monotonía de f puede ser relajada y reemplazada por

$$\exists c_0\in\Re, \qquad f_y'\geq c_0$$

Una apropiada translación prueba que recuperamos este caso cuando f es monótona creciente. Suponemos esto por simplicidad.

Por otro lado se podría considerar la aplicación f de $\Re\times\Re$ en $\Re$, dependiendo de y y u. El método funcionaría del mismo modo. (En lo que sigue, denotamos la función real $f:\Re\to\Re$ y el operador Nemytski asociado a $f:y(\cdot)\to f(y(\cdot))$ en $L^p(Q)$ por el mismo símbolo f).

(S3) $\varphi: W_0^{1,p}(\Omega)\to\Re\cup\{+\infty\}$ es una función propia (es decir no idénticamente igual a $+\infty$), convexa, semicontinua inferiormente tal que $0\in \mathrm{dom}\varphi$.

(S4) $y_0\in \mathrm{dom}\varphi$.

(S5) Para todo $(y,u)\in\Re^2$, $F(\cdot,y,u)$ es medible en Q. Para casi todo $(x,t)\in Q$, para todo $u\in\Re$, $F(x,t,\cdot,u)$ es de C^1 en $\Re$. Para casi todo $(x,t)\in Q$, $F(x,t,\cdot)$ y $F'_y(x,t,\cdot)$ son continuas en $\Re^2$. La siguiente estimación es válida

$$\left|F(x,t,y,u)\right|+\left|F'_y(x,t,y,u)\right|\leq (M_1(x,t)+m_1\left|u\right|^p)\eta(\left|y\right|),$$

donde $M_1\in L^1(Q)$, $m_1\geq 0$ y η es una función no decreciente de $\Re^+$ en $\Re^+$.

(S6) Para todo $y\in\Re$, $L(\cdot,y)$ es medible en Ω. Para casi todo $x\in\Omega$, $L(x,\cdot)$ es de $C^1(\Re)$. La siguiente estimación es válida

$$\left|L(x,y)\right|+\left|L'_y(x,y)\right|\leq M_2(x)\eta(\left|y\right|),$$

donde $M_2\in L^1(\Omega)$, η es como en (S5).

(S7) Φ es una función C^1 de $C(\bar{Q})$ en $C(\bar{Q})$, y $\boldsymbol{C}$ es un subconjunto cerrado convexo de $C(\bar{Q})$ con codimensión finita.

Recordamos que para p número natural

$$W^{1,p}(\Omega)=\{y\in L^p(\Omega)\,|\,\nabla y\in L^p(\Omega)^n\}\ \text{y}$$

$$W^{2,1,p}(Q)=\{y\in L^p(Q)\,|\,Dy,\,D^2y,\,\frac{\partial y}{\partial t}\in L^p(Q)\}.$$

En lo que sigue denotamos $V_{ad}=\{\xi\in L^p(Q)\,|\,\xi\geq 0$ en casi todo $Q\}$

El problema (P) lo planteamos de la siguiente forma, planteado en Yong (1992), que es otra forma de estudiar el control óptimo para desiguadades variacionales elípticas ($\tilde{P}$)

Minimizar J(y,u) sujeto a:

$$\frac{\partial y}{\partial t}+Ay+f(y)=u+\xi \text{ en } Q,\; y=0 \text{ en } \Sigma,\; y(\cdot,0)=y_0 \text{ en } \Omega \qquad (4.2)$$

$$\tilde{\Phi}(y)\in\tilde{\boldsymbol{C}} \qquad \text{(Condición de estado "Pura")} \qquad (4.3)$$

$$(u,\xi)\in U_{ad}\times V_{ad} \qquad \text{(Condiciones de control "Puras")} \qquad (4.4)$$

$$\int_Q y(t,x)\xi(t,x)dxdt=0 \quad \text{(Condiciones integrales mixtas estado/control)} \qquad (4.5)$$

donde

$$\tilde{\Phi}(y)=(\Phi(y),y) \text{ y } \tilde{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\times\left\{y\in C(\bar{Q})\,\middle|\,y\geq 0\right\}. \qquad (4.6)$$

Los resultados de la sección 3 de Bergounioux y Zidani (1999) establecen que los problemas (P) y ($\tilde{P}$) son equivalentes.

Definimos las funciones Hamiltonianas por:

$$H_1(x,t,y,u,q,\nu)=\nu\, F(x,t,y,u)+q\,u \qquad (4.7)$$

para todo $(x,t,y,u,q,\nu)\in Q\times\Re^4$, y

$$H_2(y,\xi,q,\lambda)=q\,\xi+\lambda\, y\,\xi \quad \text{para todo } (y,\xi,q,\lambda)\in\Re^4 \qquad (4.8)$$

TEOREMA 2. [Principio de Pontryagin para (P)] Si (S1)-(S7) son válidas y si $(\bar{y},\bar{u})$ es una solución de (P), entonces existen $\bar{q} \in L^1(0,T;W_0^{1,1}(\Omega))$, $\bar{\nu} \in \Re, \bar{\lambda} \in \Re$, $(\bar{m},\bar{q}) \in \Re^n x \Re^n$ tal que son válidas:

$$(\bar{n}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{q}) \neq 0, \bar{n} \geq 0, \qquad (4.9)$$

$$\forall z \in \{z \in C(\bar{Q}) \mid z \geq 0\} \langle \bar{\mu}, z - \bar{y} \rangle \leq 0, \text{ y } \forall z \in \boldsymbol{C} \quad \langle \bar{\theta}, z\text{-}\Phi(\bar{y}) \rangle \leq 0 \qquad (4.10)$$

$$\bar{q} \in L^{\delta}(0,T;W_0^{1,d}(\Omega)) \text{ para todo } (\delta,d) \text{ que satisface } \frac{n}{2d} + \frac{1}{\delta} < \frac{1}{2}, \qquad (4.11)$$

$$H_1(x,t,\bar{y},\bar{u},\bar{q},\bar{\nu}) \leq H_1(x,t,\bar{y},u,\bar{q},\bar{\nu}) \quad \forall\, u \in K_U(x,t) \text{ en casi todo } Q \qquad (4.12)$$

Además tenemos

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \hat{A}\bar{q} + f_y'(\bar{y})\bar{q} = \bar{\nu}\, F_y'(x,t,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\mu}\big|_Q + \left[\hat{\Phi'}(\bar{y})\,\bar{\theta}\right]\Big|_Q + \bar{\lambda}\left(\dfrac{\partial \bar{y}}{\partial t} + A\bar{y} + f(\bar{y}) - \bar{u}\right) \quad \text{en } Q \\ \bar{q} = 0 \text{ en } \Sigma,\ \ \bar{q}(T) = \bar{\nu}\, L_y'(x,\bar{y}(T)) + \bar{\mu}\big|_{\bar{\Omega}_T} + \left[\hat{\Phi'}(\bar{y})\,\bar{\theta}\right]\Big|_{\bar{\Omega}_T} \quad \text{en } \Omega \end{cases}$$

(4.13)

$$\bar{q}(x,t)\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + A\bar{y} + f(\bar{y}) - \bar{u}\right)(x,t) = 0 \text{ para casi todo } (x,t) \in Q \qquad (4.14)$$

La demostración del teorema la encontramos en Bergounioux y Zidani (1999).

5. Conclusiones.

Hemos obtenido dos condiciones de optimalidad en lo concerniente a desigualdades variacionales elípticas. En la primera le exigimos el carácter de monotonía fuerte a dichas desigualdades, mientras que en el segundo caso estas condiciones son dadas en una forma no cualificada. Esto hace que uno pueda tratar problemas de control óptimo cuando la desigualdad variacional es mas general que en los que es de tipo obstáculo o que se le exige la monotonía.

Bibliografía.

1. Barbu, V. (1984): *Optimal control of Variational Inequalities*, Research Notes in Mathematics, Pitman, Boston.

2. Bergounioux, M; Tröltzsch (1996): "Optimality Conditions and Generalized Bang-Bang Principle for a State Constrained Semilinear Parabolic Problem", *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **15**, pp. 517-537.

3. Bergounioux, M; Zidani, H. (1999): "Pontryagin Maximun Principle for optimal Control of Variational Inequalities", *SIAM Journal on Control and Optimization*, **37**, pp. 1273-1290.

4. Bonnans, J.F; Casas, E.(1995): "An extension of Pontryagin's Principle for State Constrained Optimal Control of Semilinear Elliptic Equations and Variational Inequalities", *SIAM Journal on Control and Optimization*, **33**, pp. 274-298.

5. Cerdá, E. (2001): *Optimización dinámica*, Prentice Hall, Madrid.

6. Clarke, F.H. (1983): *Optimization and Nonsmototh Analysis*, Wiley-Interscience, New York.

7. Mordukhovich, B.S.; Shao, Y. (1996): "Nonconvex differential calculus for infinite-dimensional multifunctions", *Set-Valued Analysis*, **4**, pp. 205-236.

8. Ye, J. J. (1998): "Necessary optimality conditions for control of strongly monotone variational inequalities", Proceeding of the IFIP WG 7.2 International Conference. Hangzhon. China. Chen, S., Li, X., J. Yong, J. and Zhou, X.Y. (Editors) Kluwer Academic Publishers, pp. 153-169.

9. Yong, J. (1992): "Pontryagin Maximum Principle for Semilinear Second Order Elliptic Partial Differential Equations and Variational Inequalities with State Constraints", *Differential and Integral Equations*, **5**, pp. 1307-1334.