MODELIZACIÓN DEL GASTO EN PENSIONES EN LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS COMO UN PROCESO ESTOCÁSTICO VECTORIAL.

Juan Gómez García
Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía
Universidad de Murcia
e-mail: jgomezg@um.es

Fulgencio Buendía Moya
Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía
Universidad de Murcia
e-mail: fbuendia@um.es

Javier Palarea Albaladejo
Departamento de Informática de Sistemas
Universidad Católica San Antonio de Murcia
e-mail: jpalarea@pdi.ucam.edu

RESUMEN

El espectacular aumento en los últimos años del gasto en prestaciones sociales en dinero del Sistema de Seguridad Social en España y el proceso de descentralización del mismo derivado de la configuración administrativa y política del Estado Español en Comunidades Autónomas, justifica sobradamente que se preste atención tanto a las causas explicativas como a su distribución geográfica. Así, en este trabajo, modelizamos el comportamiento temporal de la variable volumen del gasto en pensiones del Sistema de la Seguridad Social para cada Comunidad Autónoma como un proceso estocástico vectorial, solución de una ecuación diferencial estocástica de Itô en cuyo vector de coeficientes de tendencia (vector drift) hemos introducido factores exógenos que nos permitan controlar el proceso, verificando previamente que el fenómeno económico a describir sigue una evolución que lo hace modelizable mediante dicho proceso estocástico. La consideración de distintas hipótesis para el cálculo de los valores futuros de los factores exógenos, o de distintos factores exógenos, nos permiten el estudio de las variaciones en los valores predichos por el modelo, es decir, un estudio de la sensibilidad del modelo con respecto a las distintas formulaciones hechas sobre el comportamiento futuro de los factores exógenos.

Palabras clave: pensiones, proceso log-normal, factores exógenos.

1. Introducción

Los autores hacen un estudio en RAE, (2002, 24, pp 85-108) de la evolución del gasto en prestaciones económicas del sistema de Seguridad Social, tales como pensiones de jubilación, invalidez, incapacidad transitoria, desempleo u otras prestaciones como maternidad o ayudas familiares, resaltando el extraordinario crecimiento que ha experimentado ese gasto en los últimos años. Así mismo se consideran las causas de este gasto y la distribución del mismo en el Estado de las Autonomías. En este trabajo se proponían los autores modelizar el comportamiento temporal de la variable volumen de gasto en pensiones del Sistema de Seguridad Social como un proceso estocástico de difusión logarítmico-normal vectorial, cuyas componentes son las variables aleatorias que representan el valor del gasto en las distintas comunidades autónomas, y en segundo lugar, la estimación de su proyección futura para el periodo 1996-2005 (en el momento de la publicación del trabajo sólo se conocían los datos oficiales hasta el año 1995) y la detección y medida de posibles correlaciones entre los gastos de las diferentes Comunidades Autónomas.

Igualmente se hace en el trabajo un análisis de diferentes metodologías utilizadas para tales objetivos, como la de series temporales y la de regresión múltiple, y se presenta como alternativa una propuesta metodológica basada en el modelo de difusión log-normal, considerado como solución de una ecuación diferencial estocástica, resaltando las ventajas de esta metodología respecto de las anteriores: no se precisa la selección de variables explicativas (caso de los modelos de regresión) o la especificación del modelo de series temporales; se mejora la fiabilidad y capacidad de predicción del modelo, puesto que se tiene la posibilidad de introducir variables externas (factores exógenos) al problema, que sólo dependen del tiempo, y que permiten controlar los valores del proceso. Además, en particular en nuestro estudio, conocemos la distribución de la variable en cada momento, permitiéndonos disponer de sus características estadísticas en los tiempos en que interese la predicción, así como las correlaciones entre las componentes correspondientes a distintos valores del tiempo. Por esto, la propuesta metodológica que los autores hacen en RAE supone también importantes mejoras respecto a trabajos anteriores en los que se estudia la evolución de ciertas variables a través de un proceso logarítmico-normal [Gómez y Tintner (1981), pp. 177-193; Gutiérrez et al. (1991), pp. 295-316; Mures (1991), pp. 150-169], a partir de las ecuaciones de Kolmogorov asociadas al proceso.

En el mencionado trabajo de RAE, al que nos referimos en esta comunicación, se seleccionaron como factores exógenos, después de distintos ensayos, los incrementos absolutos del PIB regional y de la población total de derecho, como aquellos que proporcionaban un menor error relativo promedio de los valores estimados respecto de los reales en los años en que éstos eran conocidos. Las predicciones para el periodo 1996-2005 se obtuvieron bajo las hipótesis de que los incrementos absolutos anuales del PIBR eran constantes e iguales al incremento medio en el periodo 1991-1995, mientras que los incrementos anuales de población entre 1996 y 2005 se tomaron de las proyecciones de población realizadas por el INE para ese periodo.

El objetivo que nos planteamos en esta comunicación es, con la misma metodología; comparar los valores que predice el modelo bajo distintas hipótesis sobre los factores exógenos, concretamente las referidas al factor PIBR, puesto que para el otro factor exógeno utilizado las proyecciones de población del INE son las predicciones más fiables que podemos considerar, o por lo menos las más utilizadas y admitidas. Así que consideraremos los valores de la variable 17-dimensional Gasto Público en Pensiones de la Seguridad Social en las Comunidades Autónomas que estima el modelo que proponemos para el periodo 1996-2005, según las siguientes hipótesis para la estimación de los factores exógenos en el mismo periodo:

a). Incrementos absolutos del PIBR constantes e iguales al incremento medio en el periodo 91-95. (Para la estimación de los parámetros del modelo se tomaron como valores muestrales los de la variable en el periodo 87-95, que, como hemos indicado antes, eran los últimos publicados en las estadísticas oficiales en el año 2001). Esta hipótesis, como hemos dicho más arriba, es la que se utilizó en el mencionado artículo de RAE para las predicciones del modelo en el periodo 1996-2005.

b). Incrementos absolutos del PIBR iguales al valor mínimo en el periodo 93-95.

c).-Incrementos absolutos del PIBR iguales al valor máximo en el periodo 93-95.

d). Incrementos absolutos del PIBR estimados según tendencia lineal.

e). Incrementos del PIBR estimados según tendencia polinómica de segundo grado.

En todos los casos los valores estimados por el modelo son los correspondientes a los valores medios del proceso log-normal 17-dimensional ajustado.

Según este esquema, para cada Comunidad Autónoma dispondremos en cada uno de los años del periodo 1996-2005 de cinco estimaciones del valor de la variable, correspondientes a las cinco hipótesis formuladas sobre el comportamiento de los factores exógenos. Esto nos permitirá estudiar la sensibilidad del modelo ante la forma descrita de variación de los factores exógenos a través de la varianza del grupo de estimaciones y de la curva de varianzas. Por otra parte, la utilización más útil de esta metodología sería la de proporcionar un criterio de selección de la hipótesis a utilizar para la predicción de los valores futuros de los factores exógenos. En efecto, sería razonable elegir aquella hipótesis que ha producido mejores ajustes en algún sentido entre los valores estimados por el proceso y los valores reales de la variable cuando éstos sean ya conocidos. Como, naturalmente, los valores del gasto en pensiones por Comunidades Autónomas en el periodo 96-2002 son ya conocidos, podríamos haber aplicado ese criterio de selección y utilizar la hipótesis seleccionada sobre el factor exógeno para predicciones de valores en un horizonte más lejano. Pero dicho gasto para el periodo mencionado no nos ha sido posible conocer en su totalidad hasta ahora, por lo que dejamos este aspecto del estudio para trabajos posteriores. En definitiva, tratamos ahora de mejorar los ajustes obtenidos y la fiabilidad de las predicciones actuando sobre las hipótesis formuladas para la estimación de los valores de los factores exógenos cuando éstos son desconocidos.

2. El proceso de difusión log-normal multidimensional con factores exógenos como proceso de Itô

Del trabajo citado de RAE entresacamos las expresiones que resultan imprescindibles para el desarrollo de la comunicación.

2.1. Construcción de la E.D.E. Existencia y unicidad de soluciones

Consideramos la función

$$\boldsymbol{m}: [0,\infty)\times(R^+)^n \to R^n$$
$$\boldsymbol{m}(t,\boldsymbol{x}) = \left[\left(m_1^0 + \sum_{j=1}^{k} m_1^j G_j(t)\right)x_1, \left(m_2^0 + \sum_{j=1}^{k} m_2^j G_j(t)\right)x_2, \cdots, \left(m_n^0 + \sum_{j=1}^{k} m_n^j G_j(t)\right)x_n\right]^t$$

(2.1.1)

de componentes

$$m_i(t,\boldsymbol{x}) = \left(m_i^0 + \sum_{j=1}^{k} m_i^j G_j(t)\right)x_i \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (2.1.2)$$

donde $m_i^j \in R\,(i = 1,2,\ldots,n;\, j = 0,1,\ldots,k)$ y las funciones $G_1(t),\ldots,G_k(t)$, llamadas *factores exógenos*, pues no dependen del estado del proceso, están definidas sobre $[0,\infty)$ y son continuas y acotadas y con valores en R.

Asimismo, consideremos la función matricial

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{b}: [0,\infty)\times(R^+)^n \to M_{n\times n}(R)\\ &\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}) = \left(\boldsymbol{b}_{ij}x_i x_j\right)_{i,\, j=1,2,\ldots,n}\end{aligned} \qquad (2.1.3)$$

con $\boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{b}_{ij}\right)_{ij=1,2,\ldots,n}$ una matriz dada de elementos $b_{ij} \in R$, definida positiva y simétrica.

Como $\boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{b}_{ij}\right)_{ij=1,2,\ldots,n}$ es fijada de antemano, buscamos una matriz $\boldsymbol{b}^*(t,\boldsymbol{x})$ tal que

$$\boldsymbol{b}^*(t,\boldsymbol{x})\left[\boldsymbol{b}^*(t,\boldsymbol{x})\right]^t = \boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}) = \left(\boldsymbol{b}_{ij}x_i x_j\right)_{i,j=1,2,\ldots,n}. \qquad (2.1.4)$$

Entonces planteamos la E.D.E.

$$\begin{aligned}&d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{m}(t,\boldsymbol{X}(t))dt + \boldsymbol{b}^*(t,\boldsymbol{X}(t))d\boldsymbol{W}(t)\\ &\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}_0 \in (R^+)^n \quad t \geq 0\end{aligned} \qquad (2.1.5)$$

donde $\{\boldsymbol{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso con valores en $(R^+)^n$ y, naturalmente, $\boldsymbol{W}(t)$ es un proceso Wiener o de movimiento Browniano n-dimensional *standard*.

Esta ecuación diferencial estocástica tiene sentido y solución única, que es un proceso de difusión [ver teorema de existencia y unicidad de soluciones de una E.D.E en Gihman y Skorohod (1972), pp. 40-43 ó Arnold (1974), p. 143, por ejemplo].

El proceso solución es [Buendía (1998), pp. 268-292]

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_0 \exp\left[\left(\boldsymbol{m}^0 - \frac{1}{2} diag\boldsymbol{B}\right)t + \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{m}^j \left(G_j\right)_0^t + \boldsymbol{sW}(t)\right] \qquad (2.1.6)$$

donde

$$\left(G_j\right)_0^t = \int_0^t G_j(s)\, ds, \ \boldsymbol{s} \ \text{ verifica } \boldsymbol{s}.\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{B} = \left(b_{ij}\right)_{i,j=1,2,\ldots,n}$$

$$\boldsymbol{m}^j = \left(m_1^j, \ldots., m_n^j\right)^{\boldsymbol{t}}, \ j = 0,1,..,k$$

que es independiente de la matriz $\boldsymbol{b}^*(t, \boldsymbol{x})$ verificando (2.1.4) utilizada para plantear (2.1.5), y cuyo vector de coeficientes de tendencia (vector *drift*) $\boldsymbol{m}(t, \boldsymbol{x})$ es el dado por (2.1.1), siendo su matriz de difusión

$$\boldsymbol{b}^*(t, \boldsymbol{x})\left[\boldsymbol{b}^*(t, \boldsymbol{x})\right]^{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{b}(t, \boldsymbol{x}) = \left(b_{ij} x_i x_j\right)_{i,j=1,2,\ldots,n}$$

En forma de componentes (4.1.6) se puede expresar

$$X_i(t) = X_{0i} \exp\left[\left(m_i^0 - \frac{1}{2} b_{ii}\right)t + \sum_{j=1}^{k} m_i^j \left(G_j\right)_0^t + \sum_{r=1}^{n} s_{ir} W_r(t)\right] \quad i = 1,2,\ldots,n \quad t \geq 0$$

(2.1.7)

2.2. Características estadísticas del proceso

A partir de (2.1.6) obtenemos que el proceso $\left\{\boldsymbol{Y}(t) = \log \boldsymbol{X}(t), t \geq 0\right\}$ es un proceso Gaussiano, aunque no Wiener, con funciones media y covarianza

$$E\left[\boldsymbol{Y}(t)\right]=\boldsymbol{Y}_0+\left(\boldsymbol{m}^0-\frac{1}{2}diag\boldsymbol{B}\right)t+\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{m}^j\left(G_j\right)_0^t$$

$$\boldsymbol{Cov}\left[\boldsymbol{Y}(t),\boldsymbol{Y}(s)\right]=\boldsymbol{Cov}\left[\boldsymbol{s}\,\boldsymbol{W}(t),\boldsymbol{s}\,\boldsymbol{W}(s)\right]=\boldsymbol{s}\left[min(t,s)\boldsymbol{I}\right]\boldsymbol{s}^{\,\boldsymbol{t}}=min(t,s)\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{Cov}\left[\boldsymbol{Y}(t)\right]=\boldsymbol{Cov}\left[\boldsymbol{Y}(t),\boldsymbol{Y}(t)\right]=t\boldsymbol{B} \qquad (2.2.2)$$

de modo que $\boldsymbol{Y}(t)$ sigue una distribución

$$N_n\left(\boldsymbol{Y}_0+\left(\boldsymbol{m}^0-\frac{1}{2}diag\boldsymbol{B}\right)t+\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{m}^j\left(G_j\right)_0^t,\ t\boldsymbol{B}\right) \qquad (2.2.3)$$

Nos interesan especialmente los siguientes momentos de las distribuciones bidimensionales y unidimensionales del proceso:

$$E\left[X_i(t)X_j(s)\right]=\exp\left\{\begin{array}{l} Y_{0i}+\left(m_i^0-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}_{ii}\right)t+\sum_{r=1}^{k}m_i^r\left(G_r\right)_0^t+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}_{ii}t+Y_{oj} \\ +\left(m_j^0-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}_{jj}\right)s+\sum_{r=1}^{k}m_j^r\left(G_r\right)_0^s+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}_{jj}s+\boldsymbol{b}_{ij}min(t,s)\end{array}\right\}$$

$$=X_{0i}X_{0j}\exp\left\{m_i^0t+m_j^0s+\sum_{r=1}^{k}\left[m_i^r\left(G_r\right)_0^t+m_j^r\left(G_r\right)_0^s\right]+\boldsymbol{b}_{ij}min(t,s)\right\}$$

Los momentos marginales cualesquiera de las distribuciones unidimensionales, o sea de la variable $X(t)$ general del proceso.

$$E\left\{\left[X_i(t)\right]^2\right\}=\left(X_{0i}\right)^2\exp\left[2m_i^0t+2\sum_{j=1}^{k}m_i^j\left(G_j\right)_0^t+\boldsymbol{b}_{ii}t\right] \quad i=1,2,..,n$$

$$E\left[X_i(t)\right]=X_{0i}\exp\left(m_i^0t+\sum_{j=1}^{k}m_i^j\left(G_j\right)_0^t\right) \quad i=1,2,\dots,n$$

Para la matriz función covarianza del proceso se tiene

$$\boldsymbol{Cov}\left[\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{X}(s)\right]=\left(Cov\left[X_i(t),X_j(s)\right]\right)_{i,j=1,2,..,n}$$

$$Cov\left[X_i(t),X_j(s)\right]=E\left[X_i(t)X_j(s)\right]-E\left[X_i(t)\right]E\left[X_j(s)\right]$$

$$=X_{0i}X_{0j}\exp\left\{m_i^0t+m_j^0s+\sum_{r=1}^{k}\left[m_i^r\left(G_r\right)_0^t+m_j^r\left(G_r\right)_0^s\right]+b_{ij}min(t,s)\right\}$$

$$-X_{0i}\exp\left(m_i^0t+\sum_{r=1}^{k}m_i^r\left(G_r\right)_0^t\right)X_{0j}\exp\left(m_j^0s+\sum_{r=1}^{k}m_j^r\left(G_r\right)_0^s\right)$$

$$=X_{0i}X_{0j}\exp\left\{m_i^0t+m_j^0s+\sum_{r=1}^{k}\left[m_i^r\left(G_r\right)_0^t+m_j^r\left(G_r\right)_0^s\right]\right\}\left\{\exp\left[b_{ij}min(t,s)\right]-1\right\}$$

$$i,j=1,2,\dots,n \qquad (2.2.8)$$

y para la matriz de varianzas-covarianzas de la variable n-dimensonal $\boldsymbol{X}(t)$

$$Cov\left[X_i(t),X_j(t)\right]=E\left[X_i(t)\cdot X_j(t)\right]-E\left[X_i(t)\right]E\left[X_j(t)\right]$$

$$=X_{oi}X_{0j}\exp\left[\left(m_i^o+m_j^0\right)t+\sum_{r=1}^{k}\left(m_i^r+m_j^r\right)\left(G_r\right)_o^t\right]\times\left[\exp\left(b_{ij}t\right)-1\right]\quad i,j=1,2,\dots,n$$

$$(2.2.9)$$

En particular, para las varianzas marginales de $\boldsymbol{X}(t)$

$$Var\left[X_i(t)\right]=X_{0i}^2\exp\left[2m_i^0t+2\sum_{j=1}^{k}m_i^j\left(G_j\right)_0^t\right]\times\left[\exp\left(b_{ii}t\right)-1\right]\quad i=1,2,\dots,n$$

$$(2.2.10)$$

La matriz función de correlaciones del proceso será

$$r_{ij}(t,s)=Corr\left[X_i(t),X_j(s)\right]=\frac{Cov\left[X_i(t),X_j(s)\right]}{\sqrt{Var\left[X_i(t)\right]Var\left[X_j(s)\right]}}$$

$$= \frac{\exp\left[\beta_{ij} min(t,s)\right] - 1}{\left[\exp(\beta_{ii} t) - 1\right]^{1/2}\left[\exp(\beta_{jj} s) - 1\right]^{1/2}} \quad i, j = 1,2,..,n \qquad (2.2.11)$$

y la matriz de correlaciones de la variable n-dimensional $\boldsymbol{X}(t)$

$$\boldsymbol{r}_{ij}(t) = Corr\left[X_i(t), X_j(t)\right] = \frac{Cov\left[X_i(t), X_j(t)\right]}{\sqrt{Var\left[X_i(t)\right]Var\left[X_j(t)\right]}} =$$

$$= \frac{\exp(\beta_{ij} t) - 1}{\left[\exp(\beta_{ii} t) - 1\right]^{1/2}\left[\exp(\beta_{jj} t) - 1\right]^{1/2}} \quad i, j = 1,2,\ldots,n \qquad (2.2.12)$$

que, como se ve, no dependen de los coeficientes de tendencia del proceso ni, por tanto, de los factores exógenos.

Para las modas y medianas de los procesos componentes $\left\{X_i(t), t \geq 0\right\}$, teniendo en cuenta las expresiones de estas medidas para los procesos log-normales unidimensionales [Buendía (1998), p.184], las fórmulas (2.1.6), (2.1.7) y (2.2.3) y las distribuciones marginales del proceso $LN(n,k,\boldsymbol{m})$ $\left\{\boldsymbol{X}(t), t \geq 0\right\}$, se tiene

$$Moda\left[X_i(t)\right] = X_{0i} \exp\left[\left(m_i^0 - \frac{3}{2}\beta_{ii}\right)t + \sum_{j=1}^{k} m_i^j \left(G_j\right)_0^t\right]$$

$$Mediana\left[X_i(t)\right] = X_{0i} \exp\left[\left(m_i^0 - \frac{1}{2}\beta_{ii}\right)t + \sum_{j=1}^{k} m_i^j \left(G_j\right)_0^t\right]$$

(2.2.13)

3. Análisis de sensibilidad de la predicción a las hipótesis sobre los factores exógenos

El análisis de la evolución de la variable y la bondad del ajuste obtenido mediante una regresión exponencial (ver tabla siguiente) nos permiten aceptar un crecimiento exponencial de la tendencia del proceso y una hipótesis de variación del mismo proporcional a su estado (vector de coeficientes de tendencia de componentes proporcionales a los correspondientes de la variable). Esto es lo que permite suponer que la variable 17-dimensional gasto público en pensiones puede verificar una ecuación diferencial estocástica del tipo (2.1.5) para cuya solución, expresión (2.1.6), estimamos los parámetros en el artículo de referencia de RAE (2002), 24, pp 85-108.

Coeficientes de determinación de los ajustes exponenciales al tiempo de los valores reales del gasto en pensiones de las distintas Comunidades Autónomas.

Independent: TIEMPO

Dependent	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1
C-LEÓN	EXP	,952	7	139,81	,000	189613	,0591
CATALUÑA	EXP	,991	7	772,31	,000	468965	,0575
C-VALENC	EXP	,980	7	335,48	,000	228549	,0609
PA-VASCO	EXP	,988	7	590,00	,000	163244	,0621
ANDALUCI	EXP	,981	7	360,92	,000	357402	,0702
ARAGÓN	EXP	,971	7	232,86	,000	91697,1	,0603
ASTURIAS	EXP	,969	7	217,69	,000	122565	,0522
BALEARES	EXP	,974	7	259,75	,000	46943,9	,0562
CANARIAS	EXP	,978	7	311,11	,000	56579,1	,0764
CANTABRI	EXP	,968	7	214,42	,000	42230,3	,0567
C-MANCHA	EXP	,966	7	201,19	,000	99490,4	,0619
EXTREMAD	EXP	,943	7	116,27	,000	59839,6	,0633
GALICIA	EXP	,943	7	116,19	,000	187847	,0576
MADRID	EXP	,927	7	88,32	,000	344786	,0403
MURCIA	EXP	,906	7	67,48	,000	64358,7	,0541
NAVARRA	EXP	,964	7	189,72	,000	35666,4	,0602
RIOJA	EXP	,975	7	272,03	,000	19179,2	,0570

Elaboración propia con programa SPSS a partir de los datos del Misterio de Trabajo y Asuntos Sociales (1998)

A partir de esas estimaciones del modelo, obtenemos las siguientes valores medios del proceso para las distintas hipótesis presentadas sobre el factor exógeno PIBR .

Predicciones del valor medio bajo hipótesis de incrementos absolutos anuales del PIBR constantes

En millones de ptas. de 1986

	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Andalucía	716683	756752	797369	840285	885912	934141	985291	1039078	1095140	1151938
Aragón	161210	172445	185218	199357	214250	229912	247025	265733	286591	309503
Asturias	195959	206872	218597	231026	244037	257701	272152	287448	303797	321050
Baleares	78407	81739	85190	88789	92554	96491	100603	104883	109354	113971
Canarias	116535	127217	138576	150899	164235	178593	194176	210952	228854	247559
Cantabria	70368	73948	77533	81254	85190	89294	93576	98060	102637	107222
Cast-León	316237	328571	342471	357396	372700	388358	405079	422870	442082	462323
Cast-Mancha	170721	177929	185521	193441	201705	210335	219339	228745	238585	248961
Cataluña	793482	819145	844244	869718	896309	923812	951883	980284	1008651	1036909
Com.Valencia	400349	416595	432589	449072	466436	484504	503283	522505	541941	560912
Extremadura	99605	102370	105302	108325	111409	114557	117764	121047	124449	128076
Galicia	311064	324145	338376	353442	369030	385282	402275	420182	439162	459413
Madrid	535328	549923	564312	578892	593821	609057	624531	640128	655662	671207
Murcia	107649	112277	117026	121986	127140	132500	138095	143880	149888	155891
Navarra	62852	65992	69251	72667	76252	80024	83971	88099	92409	96902
País Vasco	292352	310808	331212	353294	376569	401060	427577	456460	488209	522183
La Rioja	31204	32516	33870	35284	36761	38308	39921	41596	43338	45145

Predicciones del valor medio bajo hipótesis de incrementos absolutos anuales del PIBR igual al máximo del periodo 93-95

En millones de ptas. de 1986

	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Andalucía	714920	753034	791500	832049	875072	920442	968454	1018811	1071139	1123921
Aragón	161134	172284	184959	198985	213750	229269	246218	264741	285388	308060
Asturias	195835	206610	218182	230441	243265	256723	270947	285995	302069	319022
Baleares	78689	82329	86114	90075	94233	98595	103167	107945	112951	118144
Canarias	114568	122958	131677	140966	150834	161253	172363	184094	196345	208808
Cantabria	70152	73494	76820	80259	83888	87659	91581	95674	99832	103971
Cast-León	316321	328745	342743	357775	373194	388976	405831	423767	443137	463550
Cast-Mancha	171661	179893	188601	197735	207316	217376	227929	239011	250664	263005
Cataluña	795995	824341	852289	880787	910591	941504	973185	1005395	1037764	1070216
Com.Valencia	396019	407634	418706	429959	441755	453905	466399	478976	491420	503123
Extremadura	99657	102477	105467	108551	111700	114915	118194	121553	125034	128745
Galicia	307854	317489	328008	339075	350377	362031	374098	386718	400015	414142
Madrid	538132	555701	573228	591120	609541	628456	647799	667455	687234	707214
Murcia	108546	114157	119978	126105	132530	139268	146359	153762	161518	169387
Navarra	64044	68518	73264	78335	83759	89568	95768	102381	109425	116921
País Vasco	286376	298232	311314	325281	339624	354318	370024	386944	405398	424746
La Rioja	31303	32722	34192	35732	37346	39041	40813	42660	44587	46594

Predicciones del valor medio bajo hipótesis de incrementos absolutos anuales del PIBR igual al mínimo del periodo 93-95

En millones de ptas. de 1986

	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Andalucía	720247	764298	809325	857127	908163	962367	1020110	1081149	1145148	1210531
Aragón	161290	172617	185495	199755	214784	230600	247887	266793	287877	311047
Asturias	196753	208551	221264	234792	249019	264027	279963	296896	315053	334294
Baleares	77942	80772	83682	86701	89841	93106	96498	100007	103651	107387
Canarias	119536	133854	149561	167055	186501	208029	232005	258541	287705	319234
Cantabria	70670	74584	78536	82658	87034	91618	96424	101478	106671	111914
Cast-León	316271	328641	342581	357548	372899	388607	405382	423232	442507	462818
Cast-Mancha	167768	171826	176058	180399	184850	189425	194117	198939	203906	209093
Cataluña	788404	808693	828137	847666	867991	888900	910048	931203	952017	972425
Com.Valencia	406794	430117	453820	478696	505210	533229	562813	593716	625715	658045
Extremadura	98881	100887	103022	105209	107417	109649	111899	114182	116538	119062
Galicia	320529	344172	370214	398463	428697	461195	496189	534047	575154	619984
Madrid	530833	540728	550218	559696	569310	579015	588741	598377	607753	616939
Murcia	107365	111686	116103	120704	125472	130416	135564	140871	146367	151827
Navarra	62033	64283	66578	68952	71411	73967	76604	79322	82118	84989
País Vasco	296889	320530	346873	375741	406710	439882	476245	516305	560786	609119
La Rioja	30969	32027	33108	34230	35393	36604	37857	39147	40478	41848

Predicciones del valor medio bajo hipótesis de incrementos absolutos anuales del PIBR con tendencia lineal

En millones de ptas. de 1986

	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Andalucía	717978	760113	803674	850548	901303	955998	1015145	1078667	1146411	1216990
Aragón	161237	172519	185361	199597	214620	230449	247775	266749	287937	311256
Asturias	196137	207304	219374	232248	245820	260176	275469	291776	309329	328002
Baleares	78284	81414	84574	87784	91053	94374	97741	101135	104566	107980
Canarias	119351	134461	152310	173792	199719	231069	269342	316107	373303	442939
Cantabria	70580	74487	78528	82852	87560	92627	98088	103996	110267	116836
Cast-León	316180	328423	342196	356952	372041	387435	403834	421240	439995	459702
Cast-Mancha	169083	173883	178233	182018	185198	187748	189631	190835	191359	191260
Cataluña	791917	815117	836793	857815	878844	899601	919680	938785	956510	972743
Com.Valencia	402541	422173	442884	465588	490888	518831	549681	583435	620142	659333
Extremadura	98940	100795	102554	104131	105484	106605	107484	108129	108571	108895
Galicia	315937	336076	359949	387703	419548	456281	498780	548216	605988	673854
Madrid	533585	545608	556549	566759	576347	585228	593295	600403	606356	611204
Murcia	107483	111725	115844	119904	123862	127704	131431	134976	138344	141302
Navarra	62188	64257	65999	67419	68499	69229	69580	69544	69117	68302
País Vasco	293219	313348	336398	362294	390759	422063	457353	497361	543087	594355
La Rioja	31195	32452	33702	34956	36213	37471	38721	39954	41167	42352

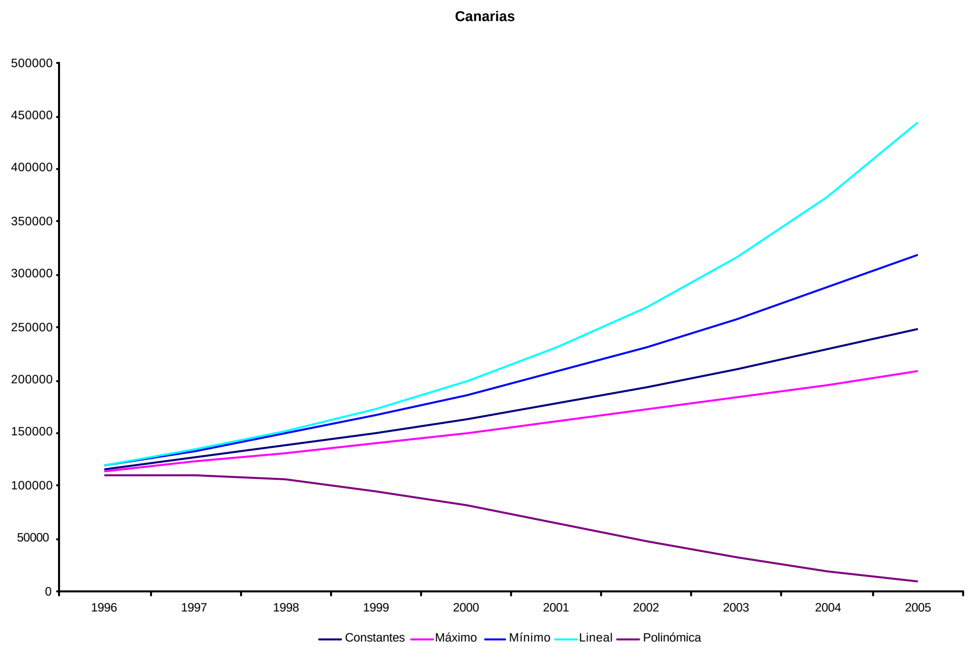
Predicciones del valor medio bajo hipótesis de incrementos absolutos anuales del PIBR con tendencia polinómica

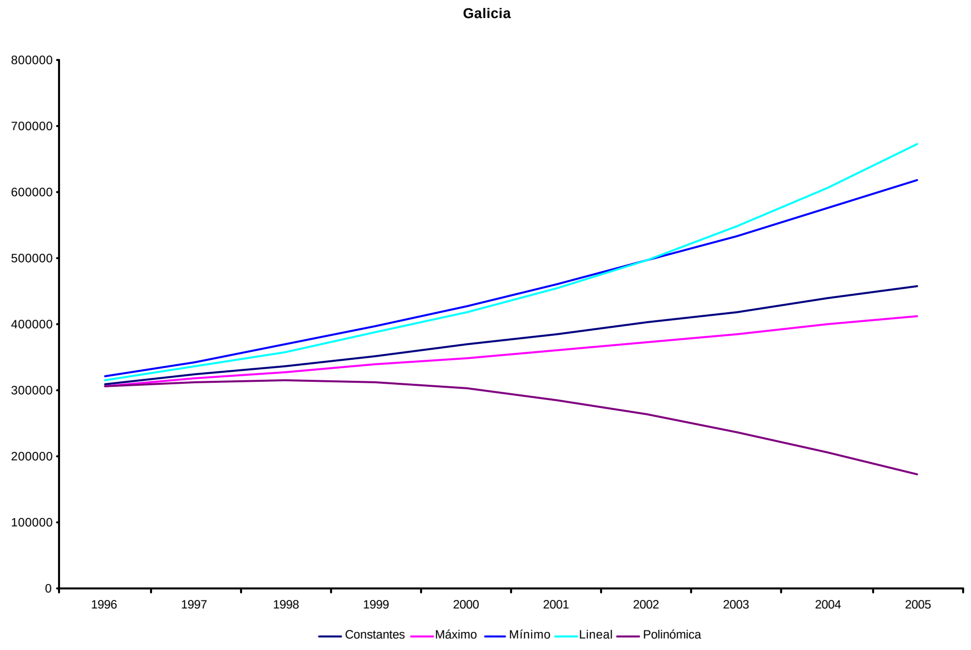
En millones de ptas. de 1986

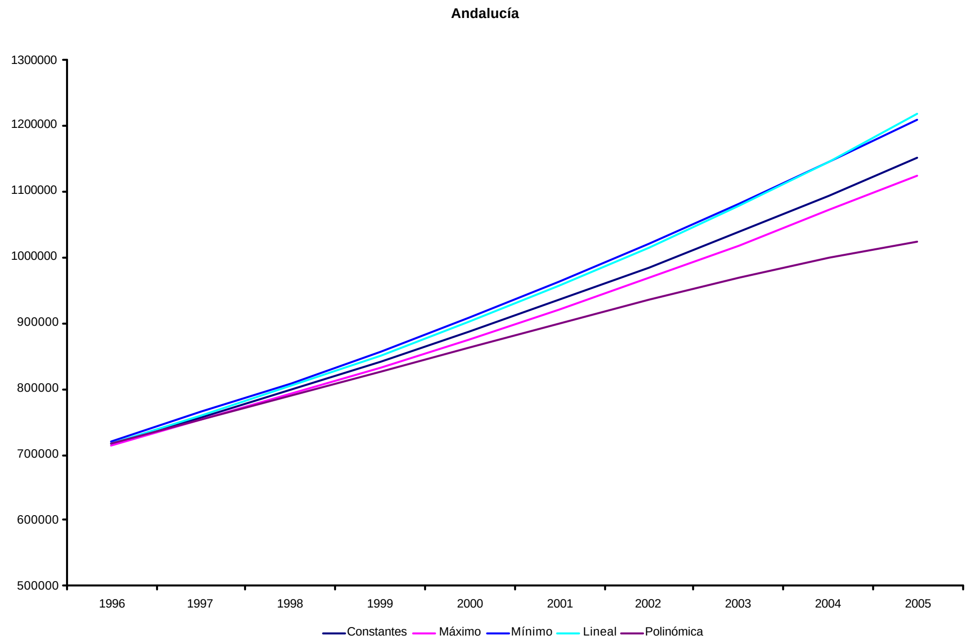
	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Andalucía	715492	753289	790105	827168	864287	900690	935951	969011	998720	1022903
Aragón	161170	172333	184985	198935	213550	228818	245387	263361	283242	304876
Asturias	195970	206845	218457	230662	243298	256392	270022	284186	299016	314287
Baleares	78951	82967	87291	92008	97204	102963	109385	116574	124689	133840
Canarias	110808	110851	105780	95685	81371	64507	47319	31840	19482	10736
Cantabria	70130	73257	76098	78697	81039	82980	84433	85328	85488	84786
Cast-León	316391	328994	343319	358872	375057	391906	410199	430025	451835	475339
Cast-Mancha	171418	180195	190645	203225	218598	237632	261445	291571	330119	380148
Cataluña	794260	821403	849018	878426	910805	946447	985564	1028551	1075748	1127899
Com.Valencia	396867	406876	413072	415392	413468	406537	394220	376218	352655	323814
Extremadura	99799	103086	107001	111624	117110	123681	131611	141261	153126	167929
Galicia	307494	313219	315127	311853	302362	286470	264471	237292	206354	173461
Madrid	537798	556879	578455	603734	633838	669894	713265	765609	828958	906280
Murcia	108313	113982	120301	127548	135932	145744	157367	171196	187832	207708
Navarra	64850	71655	81077	94420	113701	142244	185669	254016	365892	557411
País Vasco	288708	300970	311748	319857	323972	323371	318118	308018	293198	273407
La Rioja	30795	31381	31632	31510	30977	30013	28614	26802	24632	22176

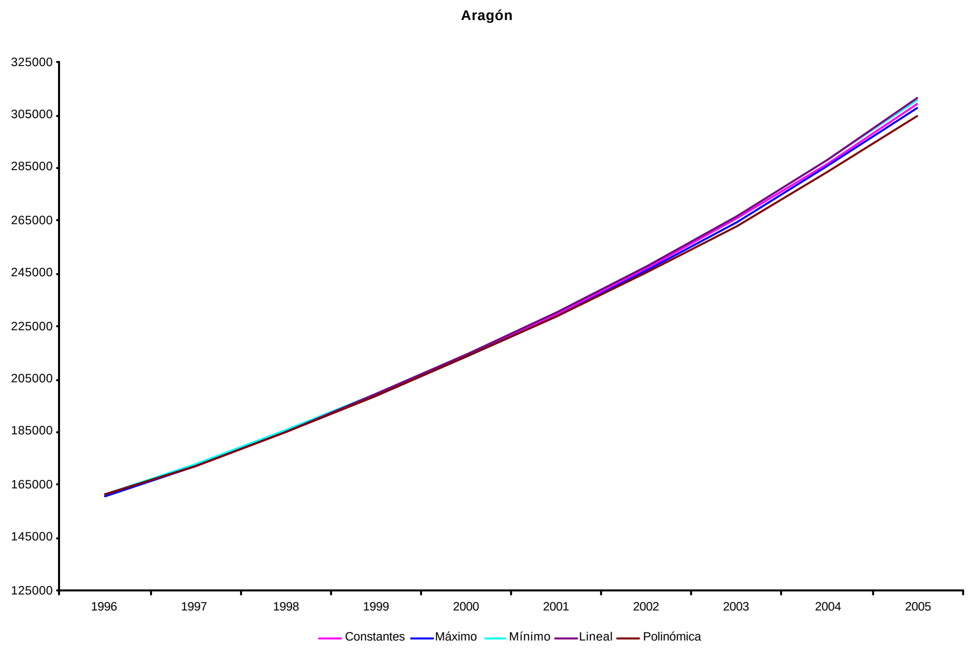
Los siguientes gráficos representan, para algunas comunidades, las diferencias que muestran estas tablas entre las estimaciones de los valores medios del proceso según las distintas hipótesis sobre el factor exógeno PIBR.

Se observa una gran variabilidad en unas comunidades (ej. Canarias y Galicia) y menos acusada en otras (ej. Andalucía y Aragón). Pero en todos los casos, la curva de evolución temporal de la desviación típica entre las estimaciones es creciente (véase tabla y gráfico de variabilidad más abajo). Como la situación más frecuente es la primera, sostenemos que la selección de la hipótesis sobre el factor exógeno es esencial. Esta conclusión, intuida desde el principio, es precisamente lo que motiva este análisis de la sensibilidad del modelo a las distintas hipótesis de cálculo de las predicciones del valor de los factores exógenos. En la introducción hemos hecho referencia a una metodología para efectuar dicha selección, resultando de ello también la posibilidad de que distintas hipótesis sean seleccionadas para diferentes Comunidades Autónomas, lo que no afecta a los parámetros estimados del modelo, puesto que éstos se calculan a partir de una muestra donde los factores exógenos y los valores reales de la variable en estudio son conocidos.





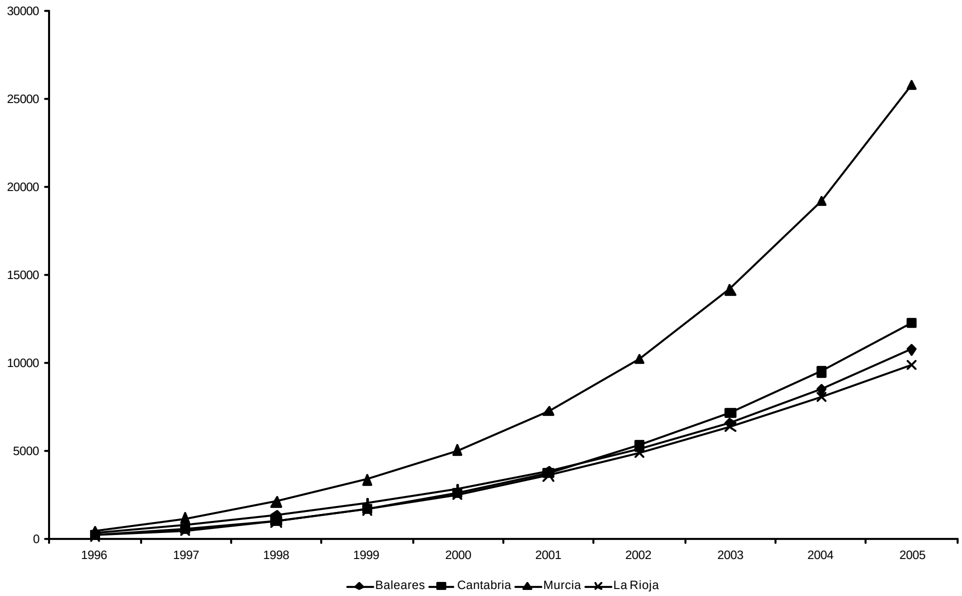

Andalucía
1300000
1200000
1100000
1000000
900000
800000
700000
600000
500000
1996
1997
1998
1999
2000
2001
2002
2003
2004
2005
Constantes
Máximo
Mínimo
Lineal
Polinómica


Aragón
325000
305000
285000
265000
245000
225000
205000
185000
165000
145000
125000
1996
1997
1998
1999
2000
2001
2002
2003
2004
2005
Constantes
Máximo
Mínimo
Lineal
Polinómica

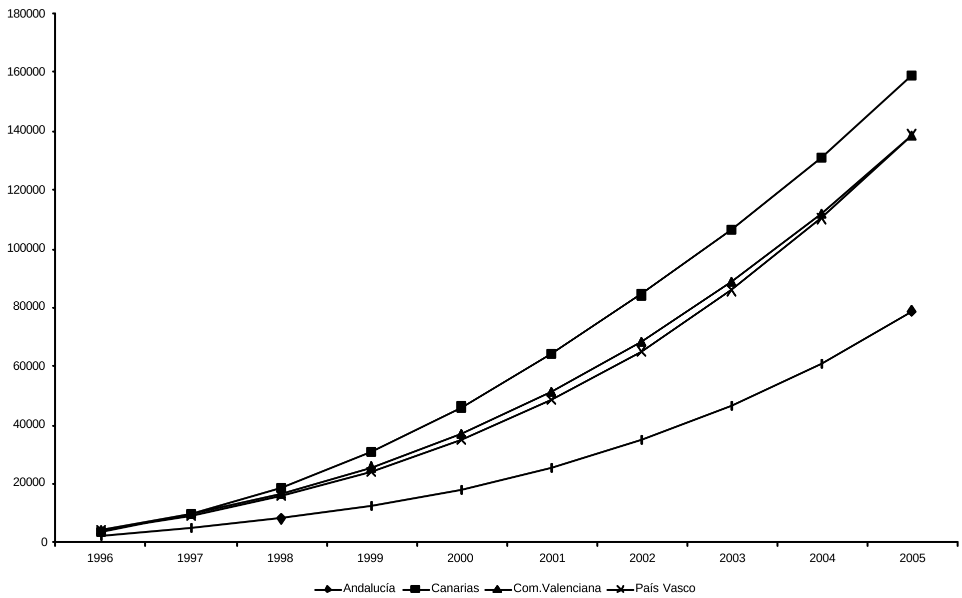
Variabilidad entre las predicciones (desviación típica)

	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Andalucía	2131,91	4776,92	8133,90	12472,46	18109,15	25393,29	34717,19	46482,21	61092,37	78861,74
Aragón	60,00	135,29	233,22	363,06	534,96	761,62	1060,63	1451,84	1961,61	2617,67
Asturias	363,96	776,44	1248,94	1794,90	2430,11	3175,38	4057,30	5106,97	6364,03	7867,11
Baleares	385,89	842,99	1392,64	2060,98	2879,35	3884,82	5121,24	6640,04	8504,14	10783,60
Canarias	3636,39	9661,84	18625,52	30806,46	46109,22	64121,50	84415,31	106721,52	131267,47	158810,38
Cantabria	244,47	586,92	1067,29	1731,23	2628,48	3807,92	5319,33	7212,32	9522,37	12272,55
Cast-León	80,54	213,28	418,08	716,76	1132,46	1691,34	2426,81	3375,62	4583,49	6096,30
Cast-Mancha	1660,36	3728,23	6399,02	9914,23	14576,04	20768,63	28990,92	39913,36	54458,76	73945,29
Cataluña	2868,39	6076,33	9739,05	14018,98	19125,90	25296,74	32797,64	41929,12	53019,12	66445,87
Com.Valencia	4389,63	9857,55	16805,42	25696,12	36994,76	51081,77	68248,76	88618,63	112142,38	138476,75
Extremadura	431,81	1025,56	1848,19	2973,87	4487,28	6488,91	9100,76	12476,74	16818,13	22402,36
Galicia	5589,44	12901,04	22631,59	35454,33	51916,34	72430,43	97207,71	126289,32	159582,57	196978,51
Madrid	3042,08	6797,07	11598,82	17858,66	26061,46	36772,36	50663,49	68548,91	91428,84	120606,02
Murcia	526,14	1214,75	2138,41	3387,57	5069,72	7315,35	10286,33	14179,69	19251,65	25792,65
Navarra	1218,72	3157,35	6205,01	10937,55	18254,29	29633,23	47591,64	76616,01	125029,59	208989,51
País Vasco	4085,62	9155,70	15639,61	24018,49	34757,77	48306,15	65153,48	85694,34	110276,86	138878,26
La Rioja	207,04	532,84	1012,88	1675,70	2542,03	3623,95	4922,25	6425,79	8112,31	9948,22

Variabilidad entre las Predicciones



Variabilidad entre las Predicciones



4. Observaciones y conclusiones

1. Las estimaciones de la variable se han hecho en este estudio a través de los valores medios del proceso, pero cabe realizarlas también, y hacer el mismo análisis comparativo, por medio de las modas y medianas del proceso (ver fórmulas (2.2.13)). En tales casos, presumimos que, en cuanto a la sensibilidad del modelo, encontraremos resultados análogos.

2. Un estudio de sensibilidad más completo cabe hacerse actuando sobre el número de factores exógenos introducidos, e incluso sobre la selección de los factores exógenos (aunque en el trabajo de RAE se indicó el criterio seguido para esta selección), así como sobre la forma funcional de introducirlos en el coeficiente de tendencia, lo que conllevaría la resolución de los problemas consiguientes de estimación de parámetros, ya que los estimadores utilizados son los correspondientes a factores exógenos introducidos de forma lineal respecto de los parámetros.

3. En todas las curvas de variabilidad entre las distintas predicciones en cada Comunidad Autónoma, como se ha indicado antes, se observa una evolución creciente, pero con valores sensiblemente diferentes entre las distintas comunidades (véanse los gráficos de comparación de cuatro curvas de variabilidad). En realidad, eso también ocurre con las varianzas de cada componente del proceso (véase fórmula 2.2.10). En cualquier, caso ambas observaciones nos conducen a que, cuanto más lejano sea el tiempo de la predicción, mayor relevancia adquiere la selección de la hipótesis sobre los factores exógenos.

5. Referencias bibliográficas

1. Arnold, L. (1974): *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications,* John Wiley& Sons, New York.
2. Buendía, F. (1998): *Contribución al estudio de los procesos estocásticos de difusión logarítmico-normales como procesos de Itô,* Tesis doctoral, Universidad de Murcia.
3. Buendía, F. y Gómez, J.(1995): "Estudio del proceso estocástico logarítmico-normal unidimensional con factores exógenos como solución de una ecuación de Itô", *IX Reunión Asepelt-España*. Santiago de Compostela.
4. Buendía, F. y Gómez, J.(1998): "El proceso estocástico de difusión logarítmico-

normal vectorial como proceso de Itô", *XXIV Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*. Almería.

5. Gihman y Skorohod (1972): *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.
6. Gómez, J. y Buendía, F. (2001): "Una generalización de los procesos estocásticos log-normal y de Gompertz como procesos de Itô", *Qüestiió. Quaderns d'Estadística i Investigació Operativa*, **25**, pp. 392-414.
7. Gómez, J., Buendía, F. y García, J (2002): "Una propuesta metodológica para la modelización del gasto en pensiones en las Comunidades Autónomas", *RAE*, **24**, pp. 85-108.
8. Gómez, L. and Tintner, G. (1981): "The application of diffusion processes in problems of developmental economic planing: a case study (Colombia)", en *Studies in Economic Theory and Practice*, *cap 16*, North-Holland, Amsterdam.
9. Gutierrez, R.; Angulo, J. M.; Gonzalez, A.; Perez, R. (1991): "Inference in log-normal multidimensional diffusion processes with exogenous factors: Applications to modelling in economics", *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, **7**.
10. Mures, M. J. (1991): Procesos estocásticos log-normales multivariantes. Aplicación a la modelización del gasto público en España, Tesis doctoral., Universidad de Granada.