

# **AUTOAFINIDAD EN SERIES TEMPORALES**

**Jesús Muñoz San Miguel**

Departamento de Economía Aplicada I

Universidad de Sevilla

e-mail: jmiguel@us.es

## **Resumen**

En algunas series temporales sumamente erráticas aparece un fenómeno típico de los conjuntos fractales. Este fenómeno, que recibe el nombre de autoafinidad, se manifiesta si representamos estas series en intervalos de tiempo con una duración cada vez menor y observamos que su apariencia es, en cierto sentido, similar.

En este trabajo vamos a analizar que consecuencias tiene este fenómeno a la hora de describir como un proceso estocástico este tipo de series temporales. Como caso particular, analizaremos la serie Ibex35, que es como nos referiremos a la serie de los logaritmos de los cierres diarios del índice Ibex35 durante la década de los noventa (desde el día 2-01-1991 hasta el día 29-12-2000).

*Palabras clave:* fractales, autoafinidad, procesos estocásticos autoafines.

*Área temática:* análisis de series temporales.

## 1.-Introducción

Uno de los primeros modelos utilizados para describir la evolución de una serie temporal como un proceso estocástico es el movimiento browniano, el cual recibe este nombre por R. Brown, que en 1828 observó este movimiento en pequeñas partículas suspendidas en un fluido, y está caracterizado fundamentalmente por dos de las propiedades de sus incrementos, la independencia y la normalidad de su distribución

Este modelo aparece por primera vez asociado a los precios de una acción en 1900 en la tesis de Louis Bachelier “Theory of speculation” y, aunque fue sistematizado por N. Wiener en 1923, de aquí que también reciba el nombre de proceso de Wiener, no cobra importancia hasta que en 1965 el premio nobel en Economía Paul A. Samuelson (1915-) se basa en la idea de trabajar con los logaritmos de los precios que aparece en 1959 en un artículo de M. F. M. Osborne, “Brownian motion in the stock market”, y propone el movimiento browniano geométrico o económico en el cual los logaritmos de los precios son los que siguen un movimiento browniano con tendencia.

Aunque desde entonces es uno de los modelos más utilizados para describir el precio de una acción, en la serie Ibex35, al igual que en la mayoría de las acciones, los datos empíricos no se ajustan bien del todo al modelo, ya que los incrementos presentan cierta dependencia (figura 1) y su distribución empírica difiere de la normal (figura 2).

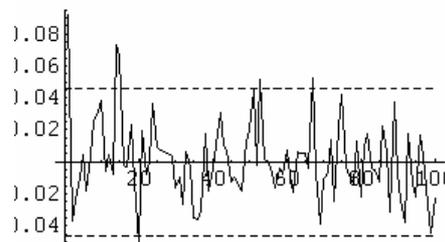
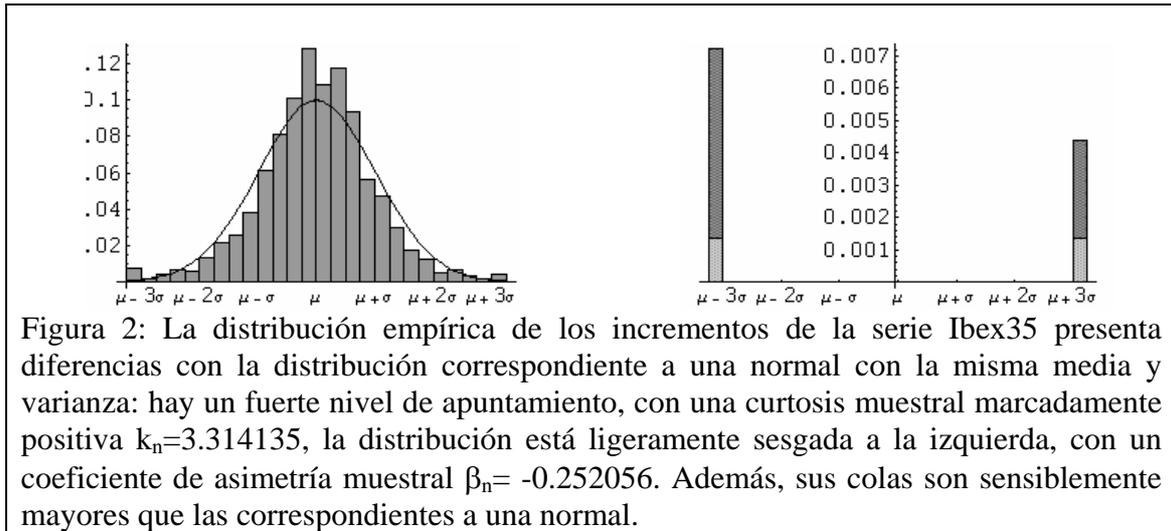
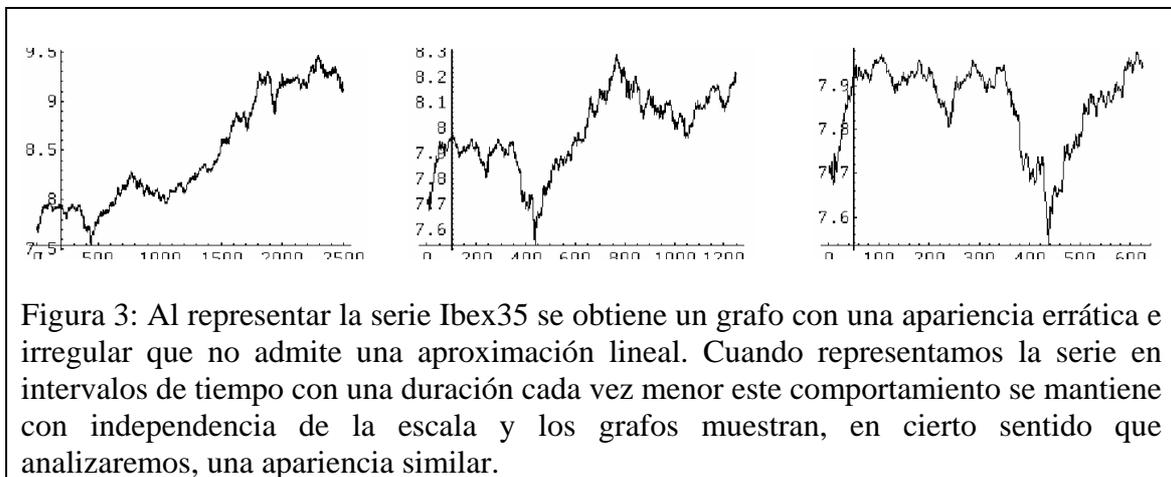


Figura 1: Las autocorrelaciones empíricas de los incrementos de la serie Ibex35, aunque pequeñas son significativamente distintas de cero, ya que, partiendo de un primer valor  $\rho(1)=0.091$ , para retardos de todos los órdenes aparecen valores superiores a su mitad en módulo.



En los años sesenta, Benoît B. Mandelbrot (1924-), al que se considera como el padre de la Geometría Fractal, propuso dos generalizaciones del movimiento browniano para modelizar la evolución de los precios de un activo financiero: los movimientos brownianos fraccionarios, que sólo tienen incrementos independientes en el movimiento browniano original, y los movimientos L-estables, cuyos incrementos son siempre independientes y en los que las distribuciones que siguen estos incrementos, distribuciones estables, son una generalización de la normal.

Las gráficas de los precios de la mayoría de las acciones comparten con la gráfica de la serie Ibox35 un fenómeno típico de los conjuntos fractales: los grafos que se obtienen cuando se reduce la escala temporal para representarlos tienen una apariencia similar (figura 3).



Este fenómeno recibe el nombre de autoafinidad y nos va a permitir englobar a ambas generalizaciones del movimiento browniano clásico dentro de los procesos estocásticos autoafines. Para ello, analizaremos en primer lugar el concepto de autoafinidad determinística en el grafo de la función seno de Weierstrass-Mandelbrot.

## 2.-Autoafinidad determinística.

La función seno de Weierstrass-Mandelbrot forma parte de una familia de funciones que surgen de una función utilizada por el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897) como ejemplo de función que es continua en todos sus puntos pero que no es diferenciable en ninguno de ellos, y es producto de sucesivas generalizaciones realizadas por Mandelbrot para obtener modelos con características comunes a otros conjuntos fractales (un estudio detallado de ésta y otras funciones de la familia se puede encontrar en Mandelbrot 2001 pp. 142-154 o en Muñoz 2002 pp. 98-108).

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda^{(s-2)n} \text{sen}(\lambda^n t) \quad t \in R \quad \lambda > 1 \quad 1 < s < 2$$

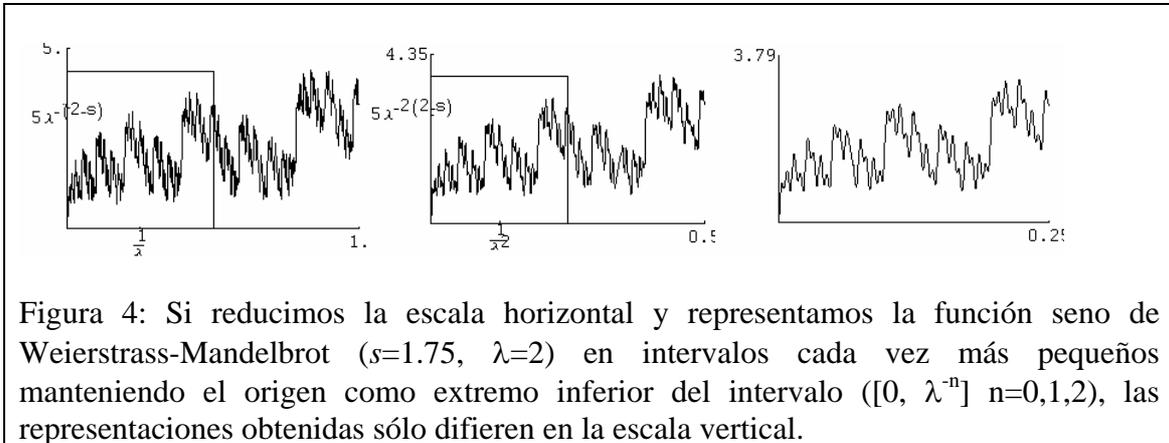
El parámetro  $s$ , determina la dimensión del grafo de la función, ya que, si  $\lambda$  es lo suficientemente grande coincide con la dimensión de recuento por cajas de su grafo (un estudio detallado del concepto de dimensión se puede encontrar en Falconer 1990, Mandelbrot 2001 o Muñoz 2002).

El parámetro  $\lambda$  es el que determina las características de escala de su grafo, ya que se puede comprobar, sin más que sustituir en la expresión de la función  $t$  por  $\lambda t$ , que se verifica

$$f(\lambda t) = \lambda^{2-s} f(t) \quad \forall t \in R \quad (1).$$

Esta propiedad marca las características de escala del grafo de esta función y es la que hace que hablemos de autoafinidad en torno al origen, ya que si reducimos la escala horizontal las representaciones obtenidas son iguales salvo en la escala vertical. Así, si interpretamos la variable de la función de Weierstrass-Mandelbrot como el tiempo, la

ecuación (1) refleja que al cambiar la escala temporal se obtiene una función que sólo difiere de la original en la escala espacial (figura 4).



### 3.-Autoafinidad estadística

Aunque la igualdad a distintas escalas sólo aparece en la función de Weierstrass-Mandelbrot cuando el factor de reducción vertical es una potencia del parámetro  $\lambda$ , y en sentido estricto no deberíamos hablar de autoafinidad, la idea de autoafinidad en torno al origen que refleja la ecuación (1) es la que se utiliza en los procesos estocásticos para hablar de autoafinidad estadística y nos llevará a definir un proceso estocástico autoafín como un proceso en el que al cambiar la escala temporal se obtiene un proceso que sólo difiere del original en la escala espacial (como los factores de escala temporal y espacial pueden ser distintos hemos preferido seguir a Mandelbrot y usar el término de proceso autoafín, del inglés self-affine process, en vez del término proceso auto-semejante, del inglés self-similar process que aparece en la literatura específica sobre el tema).

#### 3.1.-Procesos autoafines y exponente de autoafinidad

La idea de autoafinidad en torno al origen que refleja la ecuación (1) lleva a definir un proceso estocástico autoafín como un proceso en el que al cambiar la escala temporal se obtiene un proceso que sólo difiere del original en la escala espacial:

**Definición 3.1:** Un proceso estocástico  $\{X(t), t \in T\}$  que comienza en el origen (casi seguro) es un **proceso autoafín** si:

$$\forall a > 0 \exists b > 0 \text{ tal que } \{X(at)\} \cong \{bX(t)\} \quad \forall t: t, at \in T \quad \clubsuit$$

**Nota:** Como estamos interesados en la autoafinidad en torno a un punto, el punto de partida se fija en el origen imponiendo que el proceso comience en el origen casi seguro. Además, se supondrá que el proceso no es trivial para eliminar los procesos que no son más que una tendencia y que el proceso es estocásticamente continuo en  $t$  para todo  $t \in T$  por razones técnicas.

Bajo estas condiciones, el cambio de escala espacial,  $a$ , y el cambio de escala temporal,  $b$ , verifican una relación de tipo exponencial,  $b=a^H$  (Lamperti 1962):

**Teorema 3.2:** Sea  $\{X(t), t \in T\}$  un proceso estocástico autoafín que comienza en el origen (casi seguro), no trivial y estocásticamente continuo en  $t \forall t \in T$ .

Existe un único  $H > 0$ , que recibe el nombre de **exponente de autoafinidad** del proceso, tal que

$$\forall a > 0 \{X(at)\} \cong \{a^H X(t)\} \quad \forall t: t, at \in T \quad (2)$$

Para explicitar el valor de  $H$  diremos que el proceso es  $H$ -autoafín (en este caso, damos por supuesto que es un proceso estocástico no trivial, estocásticamente continuo en  $t \forall t \in T$  y que comienza en el origen casi seguro). ♣

### 3.2 El movimiento browniano clásico

El movimiento browniano clásico es un proceso estocástico cuyos incrementos son independientes y están idénticamente distribuidos según una normal con media cero y varianza proporcional al incremento temporal:

**Definición 3.3:** Un **movimiento browniano** es un proceso estocástico que comienza en el origen casi seguro,  $\{B(t): t \geq 0\}$ , verificando:

- El proceso tiene incrementos independientes.
- $\forall t \geq 0 \forall h \geq 0 \quad B(t+h)-B(t) \sim N(0, \sigma^2 h)$ . ♣

El siguiente teorema muestra que el movimiento browniano es un proceso autoafín con exponente de autoafinidad  $\frac{1}{2}$ .

**Teorema 3.4:** Sean  $\{B(t) t \geq 0\}$  un movimiento browniano y  $a > 0$ :

$$B(at) \cong a^{1/2} B(t).$$

**Demostración** La distribución del proceso es una normal con media cero y varianza proporcional al incremento temporal, ya que, al comenzar el proceso en el origen, el proceso coincide con su incremento respecto al origen:

$$B(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \quad \forall t \geq 0.$$

Para ver que el movimiento browniano es un proceso autoafín sólo hay que probar que la distribución del nuevo proceso,  $a^{-1/2}B(at)$ , también es una normal con media cero y varianza proporcional al incremento temporal, ya que el resto de las propiedades de la definición se deducen inmediatamente de las correspondientes para  $B(t)$ .

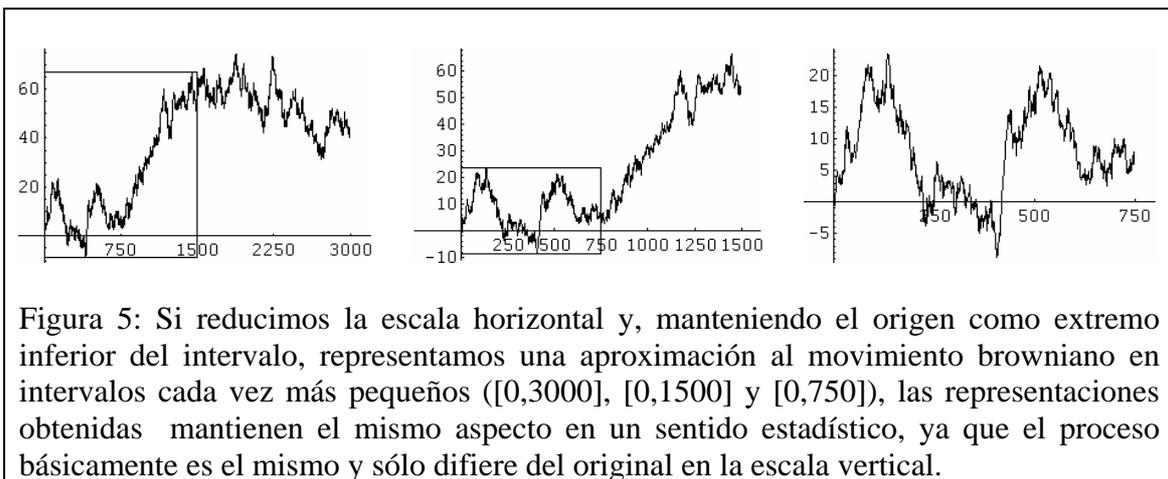
Como  $B(t)$  sigue una distribución normal,  $a^{-1/2}B(at)$  también sigue una distribución normal y basta obtener su media y varianza:

- $E[a^{-1/2}B(at)] = a^{-1/2}E[B(at)] = 0$ .
- $E[(a^{-1/2}B(at))^2] = E[a^{-1}B(at)^2] = a^{-1}E[B(at)^2] = a^{-1}\sigma^2 at = \sigma^2 t$ .

Para ver que el exponente de autoafinidad es único, sólo faltaría ver que el proceso es estocásticamente continuo; para lo que habría que ver que cuando  $h$  tiende a cero el incremento  $B(t+h)-B(t)$  converge en probabilidad a cero; lo que se puede comprobar sin más que ver que lo hace su distribución,  $N(0, \sigma^2 h)$ . ♣

El movimiento browniano permite establecer las diferencias entre la autoafinidad determinística de la función de Weierstrass-Mandelbrot, ecuación (1), y la autoafinidad estadística de un proceso estocástico, ecuación (2).

En la función de Weierstrass-Mandelbrot al cambiar la escala temporal se obtiene un grafo cuya apariencia es la misma, ya que tanto la función como el grafo sólo difieren de los originales en la escala espacial (figura 4). Sin embargo, al cambiar la escala temporal en un proceso estocástico autoafín, aunque el proceso básicamente es el mismo, ya que los incrementos siguen la misma distribución y el proceso sólo difiere del original en la escala espacial, la apariencia de los grafos no es exactamente igual y sólo mantienen el mismo aspecto en un sentido estadístico (figura 5).



Otra característica del movimiento browniano es que los incrementos del proceso son estacionarios, ya que, como los incrementos del proceso,  $B(t+h)-B(t)$ , están idénticamente distribuidos según una normal con media cero y varianza proporcional al incremento temporal, estos incrementos no dependen de  $t$  y sólo dependen del incremento temporal  $h$ .

### 3.3 Procesos autoafines con incrementos estacionarios:

Cuando consideramos procesos con incrementos estacionarios en los que la distribución de cada incremento sólo depende de la longitud del intervalo de tiempo considerado y no de su posición, hipótesis que mantendremos de aquí en adelante, el exponente de

autoafinidad del proceso permite relacionar la distribución del proceso en un instante cualquiera,  $t \in T$ , con la distribución del proceso en un instante concreto, que tomaremos siempre como el instante  $t = 1$ .

**Proposición 3.5:** Sea  $\{X(t): t \in T\}$  un proceso estocástico  $H$ -autoafín,  $H > 0$ , cuyos incrementos son estacionarios.

- $X(t) \cong t^H X(1) \quad \forall t \in T.$
- $X(t) - X(0) \cong t^H (X(1) - X(0)) \quad \forall t \in T.$

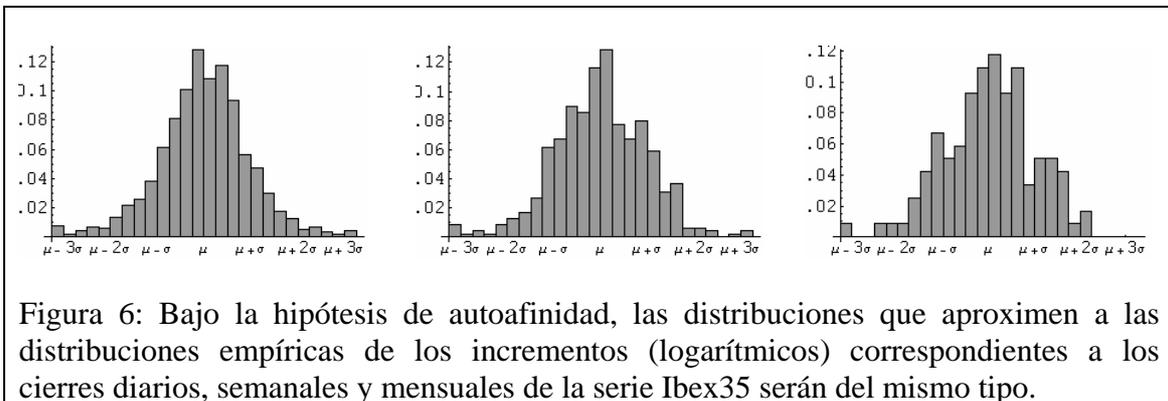
**Demostración:** La primera parte se obtiene al sustituir  $a$  por  $t$  y  $t$  por  $1$  en la definición de proceso autoafín y la segunda al incluir el origen del proceso. ♣

La primera parte pone de manifiesto una nueva consecuencia de la autoafinidad de un proceso con incrementos estacionarios: salvo por escala, la distribución de un proceso autoafín tiene que ser la misma en todos los instantes del proceso.

Por ejemplo, el movimiento browniano tiene incrementos estacionarios (están idénticamente distribuidos según una normal con media cero y varianza proporcional al incremento temporal) y verifica:

$$B(t) \sim N(0, \sigma^2 t), \quad \forall t \geq 0.$$

La segunda parte de la proposición hace que en un proceso autoafín con incrementos estacionarios, salvo por escala, los incrementos correspondientes a intervalos de distinta duración tengan la misma distribución (figura 6).



### 3.4 Esperanzas, varianzas y covarianzas de un proceso autoafín con incrementos estacionarios.

En un proceso autoafín con incrementos estacionarios, la relación entre la distribución del proceso en un instante cualquiera con la distribución del proceso en un instante concreto hace que las esperanzas, varianzas y covarianzas del proceso sólo dependan del exponente de autoafinidad y de la distribución del proceso en ese instante, que, al igual que hasta ahora, tomaremos como el instante  $t=1$ .

**Proposición 3.6:** Sea  $\{X(t), t \in T\}$  un proceso estocástico  $H$ -autoafín,  $H > 0$ , cuyos incrementos son estacionarios.

- $E[X(t)] = t^H E[X(1)]$ .
- $\text{Var}[X(t)] = t^{2H} \text{Var}[X(1)]$ .
- $\text{Cov}[X(s), X(t)] = E[X(s) X(t)] - (st)^H E[X(1)]^2$

$$\text{con } E[X(s) X(t)] = \frac{1}{2} (s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}) E[X(1)]^2.$$

**Demostración:** Como se verifica que  $\{X(t)\} \cong \{t^H X(1)\}$ , por las propiedades de la esperanza se tiene  $E[X(t)] = E[t^H X(1)] = t^H E[X(1)]$ .

Las otras dos igualdades también son consecuencia de las propiedades de la esperanza, al expresar en función de ésta las varianzas y las covarianzas, en particular, se expresa  $E[X(s) X(t)]$  como  $\frac{1}{2} (E[X(s)]^2 + E[X(t)]^2 - E[(X(s)-X(t))^2])$  y se utiliza que, al ser los incrementos estacionarios,  $X(s)-X(t) \cong X(|s-t|)$ . ♣

De esta forma, las esperanzas y varianzas de un proceso autoafín serán finitas siempre y cuando lo sean en un instante concreto

**Nota:** Si la esperanza del proceso es finita, podemos suponer que el exponente de autoafinidad del proceso verifica  $0 < H < 1$ , ya que, en este caso, el exponente de autoafinidad del proceso siempre es menor o igual uno y cuando este exponente es igual a uno el proceso es de la forma  $X(t) = t X(1)$  (casi seguro), lo que no tiene interés para nuestro análisis de la autoafinidad de un proceso estocástico (estos resultados aparecen en Embrechts y Maejima 2000). ♣

Bajo estas hipótesis, cuando el proceso tenga esperanza finita esta esperanza será nula. Cuando el proceso tenga varianza finita, único caso en el que tiene sentido el estudio de las covarianzas, también tendrá esperanza finita (por tanto esta esperanza será nula) y tanto la varianza como las covarianzas del proceso en un instante cualquiera se pueden expresar en función del exponente de autoafinidad y de la varianza del proceso en el instante  $t=1$ :

**Proposición 3.7** Sea  $\{X(t), t \in T\}$  un proceso estocástico H-autoafín,  $0 < H < 1$ , con incrementos estacionarios y varianza finita,  $\sigma^2 = E[X(1)^2] < +\infty$ :

- $E[X(t)] = 0$ .
- $\text{Var}[X(t)] = t^{2H} \sigma^2$ .
- $\text{Cov}[X(s), X(t)] = \frac{1}{2} (s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}) \sigma^2$ .

**Demostración:** Se obtienen al sustituir  $E[X(t)]$  por 0 en la proposición anterior. ♣

Como en un proceso autoafín con varianza finita las covarianzas entre los distintos instantes del proceso están determinadas por su exponente de autoafinidad, para el estudio de la dependencia de los procesos autoafines a través de las covarianzas podemos centrarnos en un caso concreto: el movimiento browniano fraccionario.

### 3.5 El movimiento browniano fraccionario

El movimiento browniano fraccionario es la generalización del movimiento browniano obtenida cuando suprimimos la independencia de sus incrementos y mantenemos la normalidad de la distribución que siguen estos incrementos.

De esta forma, aunque en el movimiento browniano fraccionario la distribución de los incrementos también es la distribución normal, la varianza en vez de ser proporcional al incremento temporal,  $h$ , lo es a una potencia suya,  $h^{2H}$ , donde el exponente  $H$ ,  $0 < H < 1$ , recibe el nombre de índice del proceso. Cuando este exponente toma el valor  $\frac{1}{2}$  el proceso coincide con el movimiento browniano clásico, único caso donde los incrementos son independientes.

**Definición 3.8** Un movimiento browniano fraccionario de índice  $H$ ,  $0 < H < 1$ , es un proceso estocástico que comienza en el origen casi seguro  $\{B_H(t): t \geq 0\}$  verificando:

- $\forall t \geq 0, \forall h \geq 0 \quad B_H(t+h) - B_H(t) \sim N(0, \sigma^2 h^{2H})$ . ♣

La distribución de los incrementos del proceso,  $B_H(t+h) - B_H(t)$ , al igual que en el movimiento browniano clásico, no depende de  $t$  y sólo depende del incremento temporal  $h$ , con lo que los incrementos del proceso son estacionarios y, al comenzar el proceso en el origen, se tiene:

$$B_H(t) \sim N(0, \sigma^2 t^{2H}), \quad \forall t \geq 0.$$

La característica fractal de invarianza de la distribución bajo un cambio adecuado de escala en el tiempo y el espacio hace que el movimiento browniano fraccionario sea un proceso autoafín cuyo exponente de autoafinidad coincide con el índice del proceso:

**Proposición 3.9** Sean  $\{B_H(t) \ t \geq 0\}$  un movimiento browniano fraccionario de índice  $H$  ( $0 < H < 1$ ) y  $a > 0$ .

$$B_H(at) \cong a^H B_H(t).$$

**Demostración:** Análogamente al movimiento browniano, basta ver que el nuevo proceso,  $a^{-H} B_H(at)$ , tiene la misma esperanza y varianza que el proceso original:

$$E[a^{-H} B_H(at)] = a^{-H} E[B_H(at)] = 0.$$

$$E[(a^{-H} B_H(at))^2] = E[a^{-2H} B_H(at)^2] = a^{-2H} E[B_H(at)^2] = a^{-2H} \sigma^2 (at)^{2H} = \sigma^2 t^{2H}.$$

Para ver que el exponente de autoafinidad es único, análogamente al movimiento browniano, sólo faltaría ver que el proceso es estocásticamente continuo. Para ello habría que ver que si  $h$  tiende a cero el incremento  $B_H(t+h) - B_H(t)$  converge en probabilidad a cero; lo que se puede comprobar sin más que ver que lo hace su distribución,  $N(0, \sigma^2 h^{2H})$ . ♣

Como el movimiento browniano fraccionario de índice  $H$ ,  $0 < H < 1$ , es un proceso autoafín, con exponente de autoafinidad  $H$ , y tiene varianza finita,  $E[B_H(1)^2] = \sigma^2 < +\infty$ , las covarianzas entre los distintos instantes del proceso están determinadas por su

exponente de autoafinidad y coinciden con las covarianzas de cualquier proceso autoafín con varianza finita que tenga el mismo exponente de autoafinidad. Esto nos va a permitir analizar la dependencia o independencia de los incrementos del proceso al considerar dos intervalos consecutivos,  $[0,t]$  y  $[t,t+h]$ , junto con los correspondientes incrementos,  $B_H(t) - B_H(0)$ ,  $B_H(t+h) - B_H(t)$ .

**Proposición 3.10** Sea  $\{B_H(t): t \geq 0\}$  un movimiento browniano fraccionario de índice  $H$  ( $0 < H < 1$ ).

$$\text{Cov}[B_H(t) - B_H(0), B_H(t+h) - B_H(t)] = \frac{1}{2} [(t+h)^{2H} - t^{2H} - h^{2H}] \sigma^2.$$

**Demostración:** Al desarrollar el producto  $\text{Cov}[B_H(t) - B_H(0), B_H(t+h) - B_H(t)]$  se expresa como  $\text{Cov}[B_H(t), B_H(t+h)] - \text{Cov}[B_H(t), B_H(t)] - \text{Cov}[B_H(0), B_H(t+h)] + \text{Cov}[B_H(0), B_H(t)]$  y sólo queda sustituir las covarianzas por el valor que nos da la proposición 3.6 ♣

Estas covarianzas sólo valen cero cuando  $H$  es igual a  $\frac{1}{2}$  y, por tanto, el movimiento browniano clásico es el único movimiento browniano fraccionario donde los incrementos son independientes. En el resto de los casos,  $H \neq \frac{1}{2}$ , los incrementos son dependientes y el tipo de dependencia que presentan se puede clasificar según el signo de estas covarianzas en persistencia cuando son positivas,  $H > \frac{1}{2}$ , y en anti-persistencia cuando son negativas,  $H < \frac{1}{2}$ .

En un **movimiento browniano fraccionario persistente**,  $\frac{1}{2} < H < 1$ , los incrementos correspondientes a los intervalos  $[0,t]$  y  $[t,t+h]$  tienden a ser del mismo signo, con lo que si  $B_H(t)$  ha crecido en el intervalo  $[0,t]$  tiende a aumentar en el intervalo  $[t,t+h]$ , o a disminuir si ha decrecido en el otro. En un **movimiento browniano fraccionario anti-persistente**  $0 < H < \frac{1}{2}$ , los incrementos correspondientes a los intervalos  $[0,t]$  y  $[t,t+h]$  tienden a ser de distinto signo y si  $B_H(t)$  ha crecido en el intervalo  $[0,t]$  tiende a disminuir en el intervalo  $[t,t+h]$ , o a aumentar si ha decrecido en el otro (figura 7).



Figura 7: Las autocorrelaciones en un ruido negro, incrementos correspondientes a un movimiento browniano fraccionario persistente  $\frac{1}{2} < H < 1$  son positivas, de forma que si el proceso ha crecido en un intervalo tiende a aumentar en el siguiente (o a disminuir si ha decrecido en el otro). En un ruido rosa, incrementos correspondientes a un movimiento browniano fraccionario antipersistente  $0 < H < \frac{1}{2}$  son negativas, de forma que sucede lo contrario: si el proceso ha crecido en un intervalo tiende a disminuir en el siguiente (o a aumentar si ha decrecido en el otro).

### 3.7 Procesos autoafines normales y no normales

En un proceso cuyas distribuciones finito dimensionales son normales, proceso gaussiano, las esperanzas y varianzas siempre son finitas y las distribuciones finito dimensionales sólo dependen de las medias, varianzas y covarianzas.

Por tanto, un proceso H-autoafín gaussiano ( $H: 0 < H < 1$ ) queda determinado, salvo escala, por su exponente de autoafinidad. En particular, cualquier proceso gaussiano con media cero y covarianzas como las de un movimiento browniano fraccionario tiene que ser un movimiento browniano fraccionario (además, dado un proceso H-autoafín con varianzas finitas ( $H: 0 < H < 1$ ), siempre existirá un proceso H-autoafín gaussiano con las mismas medias, varianzas y covarianzas: el movimiento browniano fraccionario de índice H).

Esto hace que, como ya hemos comentado, para el estudio de la dependencia de los procesos autoafines a través de las covarianzas podamos centrarnos en el movimiento browniano fraccionario.

Sin embargo, los movimientos brownianos, tanto el clásico como los fraccionarios, no siempre son adecuados para describir la evolución de una serie, ya que, como consecuencia de la autoafinidad estadística de un proceso estocástico, la distribución

empírica de los incrementos correspondientes a distintos periodos tienen que ser del mismo tipo y en muchos casos aparecen diferencias con la distribución normal, que es la distribución que siguen los incrementos de un movimiento browniano, tanto clásico como fraccionario (figura 8).

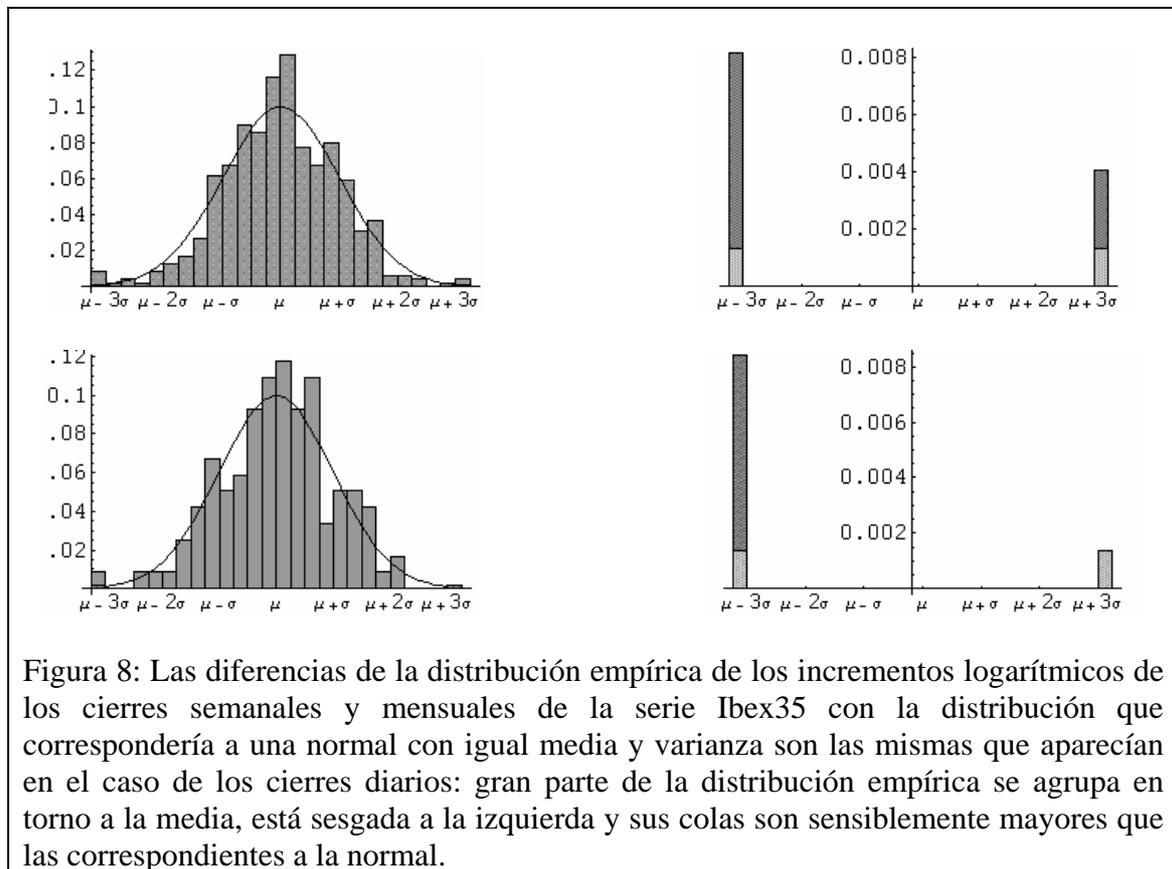


Figura 8: Las diferencias de la distribución empírica de los incrementos logarítmicos de los cierres semanales y mensuales de la serie Ibx35 con la distribución que correspondería a una normal con igual media y varianza son las mismas que aparecerían en el caso de los cierres diarios: gran parte de la distribución empírica se agrupa en torno a la media, está sesgada a la izquierda y sus colas son sensiblemente mayores que las correspondientes a la normal.

### 3.8 Procesos autoafines con incrementos independientes

Dentro de los procesos autoafines, la dependencia entre las distintas observaciones de una serie no es la única razón por la que el movimiento browniano clásico no es adecuado para describir su evolución, ya que en la distribución empírica de los incrementos (logarítmicos) de una serie pueden aparecer diferencias con la distribución normal, que es la distribución que siguen los incrementos de los movimientos brownianos clásico y fraccionario. Como ya hemos comentado, los movimientos brownianos abarcan todos los casos posibles de las covarianzas de un proceso autoafín y los tomamos como únicos modelos para la dependencia de la serie. Por tanto, para describir las diferencias con la distribución normal consideramos procesos con incrementos independientes:

**Definición 3.11** Un **proceso de Lévy** es un proceso estocástico,  $\{B(t): t \geq 0\}$ , estocásticamente continuo en  $t \forall t \in T$ , que comienza en el origen casi seguro y tal que

- el proceso tiene incrementos estacionarios e independientes ♣

Las distribuciones estables, que son una generalización de la normal, son las únicas posibles en los procesos de Lévy que presenta la característica fractal de autoafinidad estadística (Embrechts y Maejima 2000):

**Teorema 3.12** Sea  $\{X_t, t \in T\}$  un proceso de Lévy no trivial.

$\{X_t\}$  es H-autoafín si y sólo si  $\{X_t\}$  es estrictamente  $\alpha$ -estable ( $\alpha: 0 < \alpha \leq 2$ ).

En este caso,  $H = 1/\alpha$ . ♣

Como el teorema 3.12 hace que las distribuciones estables sean las únicas posibles en los procesos autoafines con incrementos independientes, el movimiento L-estable o proceso estable de Pareto-Lévy es el único proceso con incrementos independientes y características autoafines que puede generalizar al movimiento browniano.

### 3.9 Movimiento L-estable

El movimiento L-estable o proceso estable de Pareto-Lévy se obtiene al considerar que los incrementos del proceso siguen una distribución estable con exponente característico  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 2$ , en lugar de una distribución normal, que es estable con  $\alpha = 2$ . Además, como se considera que no tiene tendencia, el parámetro de localización,  $\mu$ , que en la distribución normal es la media, se toma como cero:

**Definición 3.15** Un movimiento L-estable o proceso estable de Pareto-Lévy es un proceso estocástico que comienza en el origen (casi seguro),  $\{L_{\alpha,\beta}(t): t \geq 0\}$  verificando:

- El proceso tiene incrementos independientes.
- $\forall t \geq 0, \forall h \geq 0: L_{\alpha,\beta}(t+h) - L_{\alpha,\beta}(t) \sim S_{\alpha,\beta}(0, \gamma h)$ . ♣

El parámetro de escala de la distribución,  $\gamma$ , va a establecer la proporcionalidad de los incrementos del movimiento L-estable con el incremento temporal, análogamente al movimiento browniano clásico, único caso con varianza finita ( $\alpha=2$ ), donde con la sustitución  $\gamma=\sigma^2/2$ , la distribución de los incrementos es normal con media cero y varianza  $\sigma^2h$ .

Como los incrementos del proceso están idénticamente distribuidos y sólo dependen del incremento temporal, los incrementos del proceso son estacionarios y, al comenzar en el origen, se tiene:

$$L_{\alpha,\beta}(t) \sim S_{\alpha,\beta}(0,\gamma t), \quad \forall t \geq 0.$$

Como estamos dentro de los procesos de Lévy y en esta generalización del movimiento browniano clásico queremos que la característica fractal de autoafinidad estadística se mantenga, el teorema 3.12 nos obliga a que la distribución sea estrictamente estable. En este sentido, cuando el exponente característico de la distribución,  $\alpha$ , es distinto de uno, la distribución siempre es estrictamente estable, ya que, el parámetro de localización,  $\mu$ , es cero. Sin embargo, cuando  $\alpha$  es igual a uno la distribución es estrictamente estable sólo si es simétrica y vamos a imponer que lo sea (este caso corresponde a la distribución de Cauchy).

**Proposición 3.16** Sean  $\{L_{\alpha,\beta}(t): t \geq 0\}$  un movimiento L-estable con exponente característico  $\alpha$ , simétrico para  $\alpha=1$ , y  $a>0$ :

$$L_{\alpha,\beta}(t) \cong a^{-1/\alpha} L_{\alpha,\beta}(a t)$$

Es decir, el proceso es autoafín con exponente de autoafinidad  $H=1/\alpha$ .

**Demostración** El teorema 3.11 nos garantiza que el proceso es autoafín con exponente de autoafinidad  $1/\alpha$  ♣

El exponente característico del proceso coincide con el exponente característico de la distribución,  $\alpha$  y, por tanto, en un movimiento L-estable no browniano,  $\alpha<2$ , la varianza será infinita. Además, como este exponente también determina el tamaño de las colas,

las colas de un movimiento L-estable no browniano,  $\alpha < 2$ , serán mayores que en el movimiento browniano,  $\alpha = 2$  (figura 9).

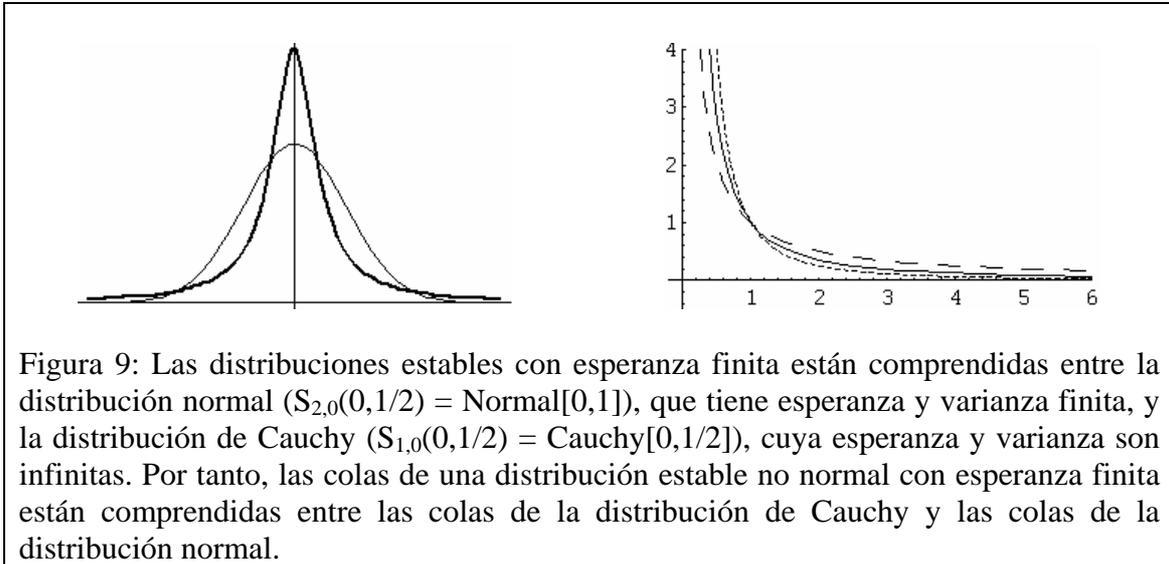


Figura 9: Las distribuciones estables con esperanza finita están comprendidas entre la distribución normal ( $S_{2,0}(0,1/2) = \text{Normal}[0,1]$ ), que tiene esperanza y varianza finita, y la distribución de Cauchy ( $S_{1,0}(0,1/2) = \text{Cauchy}[0,1/2]$ ), cuya esperanza y varianza son infinitas. Por tanto, las colas de una distribución estable no normal con esperanza finita están comprendidas entre las colas de la distribución de Cauchy y las colas de la distribución normal.

#### 4 Conclusiones

Como en un proceso autoafín las covarianzas entre los distintos instantes del proceso sólo tienen sentido cuando la varianza es finita y éstas únicamente dependen del exponente de autoafinidad del proceso, con un movimiento browniano fraccionario persistente, en el cual la dependencia no llega a desaparecer, se podría modelizar mediante un proceso autoafín la dependencia observada en la serie Ibex35, figura 1.

Sin embargo la distribución de sus incrementos es una normal, por lo que el movimiento browniano fraccionario podría combinarse con un movimiento L-estable con una distribución no normal con esperanza finita y varianza infinita; lo que explicaría las diferencias observadas entre la distribución empírica de los incrementos de la serie Ibex35 y la distribución correspondiente a una normal, figuras 2 y 8.

#### Referencias

1. Bachelier, L. Theory of speculation. En *The Random Character of Stock Market Prices*. Risk Books, 2000 (editor P. Cootner).

2. Embrechts, P y Maejima, M. An introduction to the theory of self-similar stochastic processes. *International Journal of Modern Physics B.*, 14(12-13):1399--1420, 2000.
3. Falconer, K. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, 1990.
4. Lamperti, J. Semi-stable stochastic processes. *Trans. of the American Math. Society*, 104:62--78, 1962.
5. Mandelbrot, B. B. *Fractals and Scaling in Finance*. Springer-Verlag, 1997.
6. Mandelbrot, B.B. *Gaussian Self-Affinity and Fractals*. Springer-Verlag, 2001.
7. Muñoz San Miguel, J. *La dimensión fractal en el mercado de capitales*. Tesis doctoral. Dpto. Economía Aplicada I, Universidad de Sevilla, 2002.
8. Osborne, M. F. M.. Brownian motion in the stock market. *Operations Research*, 7:145--173, 1959.
9. Samuelson, P.A.. Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review*, 6:13--31, 1965.